МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

БРЯНСКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННАЯ АКАДЕМИЯ

Кафедра высшей математики и физики

Т.В.Бычкова, В.Ф. Комогорцев, Н.И. Яковенко

# ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
ПО САМОСТОЯТЕЛЬНОМУ ВЫПОЛНЕНИЮ
ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАДАНИЙ КУРСОВОЙ РАБОТЫ

для студентов сельскохозяйственных
высших учебных заведений

Брянск 2010

УДК 51 (076)
ББК 22.1
Б 95

Бычкова, Т.В. Высшая математика: методические указания по самостоятельному выполнению практических заданий курсовой работы / Т.В. Бычкова, В.Ф. Комогорцев, Н.И. Яковенко. - Брянская ГСХА. - Брянск, 2010. - 194 с.

Предназначены для студентов 1 и 2 курсов основной и ускоренной подготовки. Ил. 21.

Рецензенты: профессора Погонышев В.А.
Ивашкин Ю.А.

*Рекомендовано к изданию методической комиссией факультета энергетики и природопользования Брянской государственной сельскохозяйственной академии, протокол №29 от 1 июня 2010 года.*

СОДЕРЖАНИЕ

# ВВЕДЕНИЕ

Математика является не только мощным средством решения практических прикладных задач и универсальным языком науки, но также элементом общей культуры. Поэтому математическое образование следует рассматривать как важнейшую составляющую фундаментальной подготовки специалиста.

Целью математического образования специалиста является:

1) воспитание достаточно высокой математической культуры;
2) привитие навыков современных видов математического мышления;
3) привитие навыков использования математических методов и основ математического моделирования в практической деятельности.

Настоящие методические указания предназначены для студентов инженерных специальностей сельскохозяйственных высших заведений, для которых учебным планом предусмотрено изучение общего курса высшей математики в объеме до 600 учебных часов.

Методические указания содержат рабочую программу курса высшей математики, общие рекомендации по изучению дисциплины, краткие указания к выполнению заданий курсовой работы, образцы решения некоторых задач, из программы общего курса высшей математики, соответствующей Государственному образовательному стандарту по направлению «Агроинженерия».

**Студент ДОЛЖЕН ЗНАТЬ:**

1. Основные понятия теории множеств – объединение, пересечение, дополнение, прямое произведение, отношение эквивалентности и порядка, мощность.
2. Аксиомы натуральных чисел, рациональных, вещественных и комплексных чисел.
3. Символы математической логики. Понятие прямой и обратной теорем. Понятие необходимого и достаточного условия.
4. Основные понятия аналитической геометрии на плоскости и в пространстве – декартовы, полярные, цилиндрические и сферические координаты, расстояние между точками в декартовых координатах, способы задания линий на плоскости, поверхностей и линий в пространстве.
5. Определение вектора с геометрической точки зрения. Линейные операции над векторами, скалярное, векторное и смешанное произведения векторов и их свойства.
6. Способы задания прямой на плоскости и в пространстве (общий, канонический, параметрический). Общее уравнение плоскости.
7. Канонические уравнения кривых и поверхностей второго порядка. Фокальные свойства. Изображения кривых и поверхностей второго порядка, заданных каноническими уравнениями.
8. Понятие линейного пространства. Пространство $R^n$.
9. Определение вектора как элемента линейного пространства.
10. Понятие базиса и размерности пространства.
11. Понятие отображения. Понятие обратного отображения, композиции отображений, их значение для математического анализа.
12. Понятие матрицы. Понятие массива заданной размерности.
13. Понятие определителя квадратной матрицы, его свойства.
14. Скалярное произведение векторов в $R^n$.

15. Основные элементарные функции, их свойства и графики. Производные и первообразные основных элементарных функций. Представление степенными рядами.

16. Свойства многочленов (теорема Безу и Виета, идея построения интерполирующих многочленов).

17. Понятие предела функции одной и нескольких переменных. Свойства пределов. Замечательные пределы.

18. Понятие бесконечно малой в точке функции.

19. Понятие непрерывного отображения. Свойства непрерывных функций.

20. Понятие экстремума (локального, глобального, безусловного и условного).

21. Понятие дифференциала первого и второго порядка. Формулы Тейлора и Лагранжа.

22. Понятие выпуклого множества. Определение выпуклой функции.

23. Понятие первообразной.

24. Основные понятия теории дифференциальных уравнений: обыкновенное дифференциальное уравнение, системы дифференциальных уравнений - каноническая, нормальная и аномальная, решение дифференциального уравнения или системы, задача Коши, краевая и смешанная задача, интеграл.

25. Геометрические понятия теории дифференциальных уравнений – поле изоклин, интегральная кривая.

26. Понятие устойчивости решения.

27. Понятие корректно поставленной задачи.

28. Понятие интеграла (неопределенного, определенного, криволинейного, кратного, поверхностного) и их свойства.

29. Дифференциальные операции теории поля (градиент, дивергенция, ротор, оператор Лапласа), их свойства.

30. Понятие числового и функционального рядов, сумма ряда, сходимость функционального ряда.

31. Понятие степенного ряда, характер и область сходимости.

32. Понятие рядов Фурье, характер сходимости.

33. Различные способы задания функций (явно, неявно, рядом, интегралом, зависящим от параметра и т.д.).

34. Основные уравнения математической физики, применяемые в сфере профессиональной деятельности, свойства их решений.

35. Понятие случайного события. Операции в алгебре событий, их интерполяция.

36. Понятие вероятного события. Правила вычисления вероятностей.

37. Понятие непрерывной и дискретной случайных величин, законы распределения, их графические изображения.

38. Числовые характеристики дискретных и непрерывных случайных величин – математическое ожидание, дисперсия, среднеквадратическое отклонение.

39. Нормальный закон распределения, его графическое изображение и числовые характеристики.

40. Понятие повторных независимых испытаний. Биномиальный закон распределения.

41. Понятие генеральной и выборочной совокупности.

42. Выборочные характеристики: средняя арифметическая, математическое ожидание, дисперсия, среднеквадратическое отклонение.

43. Точечные оценки вероятности, математического ожидания, дисперсии.

44. Понятие доверительной вероятности и доверительного интервала.

45. Понятие статистической гипотезы и статистического критерия.

46. Понятие независимых и зависимых случайных величин, регрессии и корреляции.

47. Определение парного коэффициента корреляции, его свойства.

**Студент ДОЛЖЕН УМЕТЬ:**

1. Задавать множества с помощью неравенств. Изображать множества, заданные неравенствами. Находить объединения, пересечения, дополнения и прямые произведения множеств.
2. Выполнять арифметические действия с действительными и комплексными числами.
3. Переводить комплексные числа из одной формы в другую. Вычислять корни из комплексного числа.
4. Формулировать теорему обратную к данной, уметь различать необходимые и достаточные условия в формулировке любой теоремы.
5. Записывать суждения с помощью символов математической логики.
6. Определять координаты точек в различных системах координат.
7. Находить координаты вектора с заданными концами, его длину.
8. Выполнять линейные операции с векторами, заданными в координатной форме или геометрически.
9. Находить скалярное, векторное и смешанное произведения векторов, заданных в координатной форме или любой другой форме.
10. Применять вектора для решения следующих задач: вычисление углов, расстояний, площадей треугольников и параллелограммов, нахождение уравнений прямой на плоскости, плоскости в пространстве, прямой в пространстве.
11. Определять тип кривой или поверхности второго порядка, заданной каноническим уравнением, и изображать её графически.
12. Приводить уравнения кривых и поверхностей к каноническому виду.
13. В пространстве $R^n$ определять нормы элементов, углы между векторами, проекции векторов на подпространство, находить расстояния между точками, между точкой и плоскостью, задавать шары и брусы с помощью неравенств.

14. Разлагать вектор по ортогональному базису в конечномерном и бесконечномерном пространствах.

15. Решать системы линейных уравнений, находить линейный оператор, обратный данному (в каноническом пространстве).

16. Выполнять действия над матрицами. Находить матрицу, обратную данной.

17. Вычислять определители различных порядков.

18. Находить собственные операторы и собственные значения линейного оператора (а наиболее общем виде).

19. Определять пределы отношений бесконечно малых и бесконечно больших функций.

20. Находить производные элементарных функций, при этом дифференцирование табличных производных студент должен выполнять «в уме».

21. Выполнять локальное исследование функций, применяя для этого формулу Тейлора.

22. Строить графики функций следующим образом: основных элементарных – по памяти, прочих не применяя производных, Приближенно определять ход кривой, а потом уточнить вид графика с помощью первой и высших производных.

23. Находить уравнение касательной прямой к плоским кривым.

24. Выполнять локальное исследование функций нескольких переменных и, в частности, вычислять производные по направлениям, находить направление наискорейшего роста и убывания функции, определять координаты стационарных точек, находить уравнения касательных плоскостей и нормали к поверхностям.

25. Представлять графически функции двух переменных.

26. Находить первообразные, пользуясь таблицами неопределенных интегралов.

27. Вычислять среднее значение функции, площади фигур, длины дуг, криволинейные интегралы.

28. Сводить к квадратурам дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными, линейные, в полных дифференциалах.

29. Находить общее решение линейных неоднородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

30. Сводить к уравнению первого порядка дифференциальные уравнения второго порядка специального типа.

31. Представлять дифференциальные уравнения $n$ - го порядка в виде систем уравнений первого порядка, и наоборот.

32. Разлагать функции в степенные ряды.

33. Применять степенные ряды в приближенных вычислениях для решения дифференциальных уравнений.

34. Разлагать функции в ряды Фурье.

35. Вычислять кратные интегралы по простым областям в декартовых, полярных, цилиндрических и сферических координатах.

36. Находить градиент ($grad$), дивергенцию ($div$) и ротор ($rot$) классических полей теории электромагнетизма, гидромеханики, теории теплопередачи и т.п. (в соответствии со специальностью студента).

37. Решать задачу Коши для линейных уравнений и систем операционным методом и судить об устойчивости найденных решений.

38. Вычислять вероятность случайного события в классической модели, суммы и произведения случайных событий.

39. Применять ряды Фурье, степенные ряды и интегральные преобразования Фурье – Лапласа для решения задач математической физики.

40. Вычислять числовые характеристики случайных величин – математическое ожидание, дисперсию, среднеквадратическое отклонение.

41. Вычислять вероятность попадания нормальной случайной величины в заданный интервал.

42. Уметь пользоваться правилом «трех сигм».

43. Получать графическое изображение вариационных рядов (гистограмму, полигон, эмпирическую функцию распределения).

44. Вычислять выборочные среднюю арифметическую, дисперсию и среднеквадратическое отклонение.

45. Находить точечные оценки вероятности, математического ожидания, дисперсии.

46. Вычислять выборочный парный коэффициент корреляции. Проверять значимость коэффициента корреляции.

47. Применять стандартные математические среды и программы исследования для решения типовых задач исследования операций на ЭВМ и персональных компьютерах.

## ОБЩИЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Основной формой обучения студента является самостоятельная работа над учебным материалом: чтение учебников, решение задач, выполнение контрольных заданий.

Если в процессе изучения материала или при решении задач у студента возникают трудности, то можно обратиться к преподавателю кафедры высшей математики для получения устной или письменной консультации. В случае письменной, студент должен точно указать характер затруднения, полное название учебника или задачника, год издания и страницу, где находится непонятный для студента вопрос или задача.

В соответствии с действующим планом студенты изучают курс высшей математики и выполняют курсовую работу. Её выполнение осуществляется поэтапно, по мере изучения соответствующих тем на лекциях и аудиторных практических занятиях, но не позднее двух недель после прохождения данной темы.

При выполнении курсовой работы студент должен руководствоваться следующими указаниями:

1. Каждая работа должна выполняться в отдельной тетради, на внешней обложке которой должны быть ясно написаны фамилия студента, его инициалы, номер группы, вариант.

2. Решения номеров следует располагать в порядке, указанном в заданиях. Перед решением каждой задачи надо полностью переписать ее условие.

3. Решение задач следует излагать подробно, делая соответствующие ссылки на вопросы теории с указанием необходимых формул теорем.

4. Решение задач геометрического содержания должно сопровождаться чертежами, выполненными аккуратно, с указанием осей координат и единиц масштаба. Объяснения к задачам должны соответствовать обозначениям, приведенным на чертежах.

5. На каждой странице тетради необходимо оставлять поля шириной 3-4 см для замечаний преподавателя.

6. Курсовая работа должна выполняться **самостоятельно.** Несамостоятельно выполненная работа лишает студента возможности проверить своей подготовленности по теме.

Если преподаватель установит **несамостоятельное выполнение работы, то она не будет зачтена.**

7. Студент выполняет тот вариант курсовой работы, который назначается преподавателем, ведущим практические занятия в данной группе.

## ОСНОВНЫЕ ПРАВИЛА ВЫПОЛНЕНИЯ КУРСОВОЙ (САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ) РАБОТЫ

**При оформлении курсовой работы** общепринята следующая **структура**:

- Титульный лист
- Оглавление с указанием страниц
- Введение
- Основная часть
- Заключение

- Список использованной литературы
- Приложения

При оформлении текста работы следует учитывать, что открывается работа **титульным листом**, где указывается полное название ведомства, университета, факультета, кафедра, тема работы, фамилии автора и руководителя, место и год написания.

На следующей странице, которая нумеруется номером 2, помещается оглавление с точным названием каждой главы и указанием начальных страниц.

**Введение** должно содержать общую постановку проблемы, обязательный обзор использованной литературы и источников.

В **основной части** непосредственно раскрывается проблема. При этом важно не только продемонстрировать существо вопроса, но и отразить особенности трактовок различных авторов.

**Заключение** содержит выводы, итоги курсовой работы, где поощряется самостоятельность суждений и оценок.

**Перечень использованной литературы** следует оформлять в виде библиографического списка.

Не вошедшие в основной текст материалы приводятся в конце работы в виде **приложений**. Это могут быть расчеты, иллюстрации, таблицы, графики и т.п. Приложения нумеруются. Каждое приложение должно начинаться с новой страницы, в правом верхнем углу иметь надпись "Приложение" с указанием порядкового номера и заголовок посередине страницы. Располагаются приложения в порядке появления ссылок на них в тексте.

## Оформление текста:

- Печатать следует на одной стороне листе формата А4 (210 х 297 мм).
- **Поля страницы**: левое - 3 см, правое - 1,5 см, нижнее 2 см, верхнее - 2 см.
- Текст печатается через 1,5 интервала, красная строка - 1,25 см..
- Шрифт: Times New Roman Cyrr, размер шрифта - 14 пт.

**Нумерация страниц и разделов:**

Страницы работы следует нумеровать арабскими цифрами, соблюдая сквозную нумерацию по всему документу. Номер проставляется внизу посередине листа шрифтом № 10.

Титульный лист включается в общую нумерацию, но номер страницы на нем не проставляется. Иллюстрации, таблицы, графики, расположенные на отдельных листах, включаются в общую нумерацию страниц.

Основную часть работы состоит из разделов, подразделов, глав, параграфов, пунктов и подпунктов. Они нумеруются (кроме введения, заключения, списка литературы, приложений) арабскими цифрами.

*Пример:*

Раздел 1,

Подраздел 1.1,

пункт 1.1.1,

подпункт 1.1.1.1.

Разделы и подразделы должны иметь заголовки. Слово "раздел" не пишется.

Заголовки разделов, Введение, Заключение, Оглавление, Список литературы, Приложения располагают в середине строчки без точки в конце сроки, отделяя от текста тремя межстрочными интервалами. Переносы в заголовках не допускаются. Каждую главу рекомендуется начинать с новой страницы.

**Графический материал**

Иллюстрации (чертежи, графики, схемы, диаграммы, фотоснимки, рисунки) следует располагать в работе непосредственно после текста, в котором они упоминаются впервые, или на следующей странице, если в указанном месте они не помещаются.

Иллюстрации следует нумеровать арабскими цифрами порядковой нумерацией в пределах всей работы. Номер следует размещать под иллюстрацией посередине после слова “Рисунок”.

**Формулы и уравнения**

Пояснение значений, символов и числовых коэффициентов следует приводить непосредственно под формулой в той же последовательности, как и в формуле.

Уравнения и формулы следует выделять из текста в отдельную строку. Выше и ниже каждой формулы или уравнения должно быть оставлено не менее одной свободной строки.

Формулы и уравнения в работе следует нумеровать порядковой нумерацией в пределах всей работы арабскими цифрами в круглых скобках в крайнем правом положении напротив формулы. Допускается нумерация формул в пределах раздела.

## ТЕМЫ КУРСОВЫХ РАБОТ

по высшей математике

для студентов инженерных специальностей БГСХА

1. Системы линейных уравнений, их точное и приближенное решение ([9], [5], [6]).
2. Поверхности в пространстве, их уравнения и графики([11], [6]).
3. Параметрическое задание функций и линий ([7], [11], [6], [10]).
4. Особые точки кривой ([7], [10]).
5. Приближённое вычисление действительных корней уравнения ([7], [9], [6], [11])
6. Системы нелинейных уравнений и их приближенное решение ([9], [5]).
7. Комплексные числа и исследование многочленов ([7], [9], [6]).
8. Условный экстремум функции нескольких переменных и его приложения к инженерно-техническим задачам ([7], [10]).
9. Кривизна плоской кривой и её приложения в механике ([7], [10]).
10. Приложения дифференциального исчисления к геометрии в пространстве ([7]).
11. Интерполирование функции ([7], [9], [5], [6], [10], [11]).

12. Аппроксимация функций путём подбора эмпирических формул ([6], [9], [11]).
13. Приближенное вычисление определенных интегралов ([5], [6], [7], [9]).
14. Криволинейные и поверхностные интегралы и их приложения к инженерно-физическим задачам ([4], [7], [11]).
15. Особые решения дифференциального уравнения первого порядка ([2], [7], [12]).
16. Дифференциальное уравнение механических колебаний ([7], [8], [11]).
17. Электромагнитные колебания в электрическом колебательном контуре ([4], гл.2, §6).
18. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений и их систем с помощью рядов ([2], [5], [6], [7], [12]).
19. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений и их систем методом последовательных приближений ([4], [5], [12]).
20. Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений и их систем ([5], [8], [9], [12]).
21. Применение рядов в приближенных вычислениях ([5], [6], [7], [10]).
22. Ряды Фурье и их приложения к задачам механики ([2], [4], [8], [7], [11]).
23. Операционное исчисление и его приложение к решению инженерно-технических задач ([2], [8]).
24. Линейное программирование и его приложение к практическим задачам ([6], [9]).
25. Краевые задачи в теории обыкновенных дифференциальных уравнений и их приближенное решение ([4], гл.5, §1; [9], гл.7, §3).
26. Волновое уравнение, его физико-техническая интерпретация и разностные методы его решения ([5]; [8]; [9]).
27. Уравнение теплопроводности и разностные методы его решения ([5]; [8]; [9]).
28. Уравнение Лапласа и разностные методы его решения ([5],; [8], [9]).
29. Правила приближенных вычислений и оценка погрешностей при вычислениях ([5], [9]).

30. Векторные функции скалярного аргумента и их приложения в механике ([4]).
31. Аппроксимация функций с помощью многочленов ([9]).
32. Вычисление значений функций ([5]).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Бахвалов Н.С. Численные методы. Т.1. – М.: Наука, 1978.
2. Бугров Я. С., Никольский С. М. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы и ряды. –М.: Наука, 1981.
3. Волков Е. А. Численные методы. –М.: Наука, 1988.
4. Долгов Н. М. Высшая математика. –Киев: Выща школа, 1988.
5. Копченова Н. В., Марон И. А. Вычислительная математика в примерах и задачах. –М.: Наука, 1972.
6. Кудрявцев В. А., Демедович Б.П. Краткий курс высшей математики. –М.: Наука, 19786.
7. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления для ВТУЗов. –ФИЗМАТИЗ, 1961.
8. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Т.2 –М.: Наука, 1978.
9. Турчак Л. И. Основы численных методов. –М.: Высшая школа, 1990.
10. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.1-3. –М.: Наука, 1970.
11. Щипачев В. С. Высшая математика. –М.: Высшая школа, 1990.
12. Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. –М.: Наука, 1969.

*ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ*

## Тема 1. Аналитическая геометрия на плоскости

**Задача 1.** Даны вершины треугольника ABC: A(- 4; 8), B(5;- 4), C(10; 6). Найти: 1) длину стороны AB; 2) уравнения сторон AB и AC и их угловые коэффициенты; 3) внутренний угол A в радианах с точностью до 0,01; 4) уравнение высоты CD и ее длину; 5) уравнение окружности, для которой высота CD есть диаметр; 6) систему линейных неравенств, определяющих треугольник ABC.

*Решение:* 1. Расстояние d между точками $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$ определяется по формуле:

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \qquad (1)$$

Подставив в эту формулу координаты точек A и B, имеем:

$$AB=\sqrt{[5-(-4)]^2+(-4-8)^2}=\sqrt{81+144}=15.$$

2. Уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$, имеет вид:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1} \qquad (2)$$

Подставив в (2) координаты точек A и B, получим уравнение прямой AB:

$$\frac{x-(-4)}{5-(-4)}=\frac{y-8}{-4-8}, \frac{x+4}{9}=\frac{y-8}{-12}, \frac{x+4}{3}=\frac{y-8}{-4}$$

$$3y-24=-4x-16,\ 4x+3y-8=0 \ \text{(AB)}.$$

Для нахождения углового коэффициента $k_{AB}$ прямой AB разрешим полученное уравнение относительно y: $y=-\frac{4}{3}x+\frac{8}{3}$. Отсюда $k_{AB}=-\frac{4}{3}$. Подставив в формулу (2) координаты точек A и C, найдем уравнение прямой AC.

$$\frac{x-(-4)}{10-(-4)}=\frac{y-8}{6-8}. \quad \frac{x+4}{14}=\frac{y-8}{-2}, \quad \frac{x+4}{7}=\frac{y-8}{1},$$

$$x+7y-52=0 \ \text{(AC)}.$$

Отсюда $k_{AC} = -\frac{1}{7}$.

3. Угол α между двумя прямыми, угловые коэффициенты которых равны $k_1$ и $k_2$, определяется по формуле:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}. \qquad (3)$$

Угол *A*, образованный прямыми AB и AC, найдем по формуле (3), подставив в нее $k_1 = k_{AB} = -\frac{4}{3}$, $k_2 = k_{AC} = -\frac{1}{7}$.

$$\operatorname{tg} A = \frac{-\frac{1}{7} - (-\frac{4}{3})}{1 + (-\frac{1}{7}) \cdot (-\frac{4}{3})} = \frac{\frac{4}{3} - \frac{1}{7}}{1 + \frac{4}{21}} = \frac{\frac{25}{21}}{\frac{25}{21}} = 1,$$

$$\angle A = arctg\, 1 = 45^{\circ} \approx 0{,}79 \text{ рад.}$$

4. Так как высота *CD* перпендикулярна стороне *AB,* то угловые коэффициенты этих прямых обратные по величине и противоположны по знаку, т.е.

$$k_{CD} = -\frac{1}{k_{AB}} = -\frac{1}{-\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}.$$

Уравнение прямой, проходящей через данную точку $M_1(x_1;\ y_1)$ в заданном угловом коэффициентом k направлении, имеет вид:

$$y - y_1 = k(x - x_1). \qquad (4)$$

Подставив в (4) координаты точки *C* и $k_{CD} = \frac{3}{4}$, получим уравнение высоты CD:

$$y - 6 = \frac{3}{4}(x - 10),\ 4y - 24 = 3x - 30,\ 34y - 6 = 0\ \ (CD) \qquad (5)$$

Для нахождения длины CD определим координаты точки D, решив систему уравнений (AB) и (CD):

$$\begin{cases} 4x + 3y - 8 = 0, \\ 3x - 4y - 6 = 0, \end{cases}$$ откуда $x = 2,\ y = 0$, то есть D(2;0).

Подставив в формулу (1) координаты точек C и D, находим:

$$CD=\sqrt{(10-2)^2+(6-0)^2}=\sqrt{64+36}=10.$$

5. Уравнение окружности радиуса R с центром в точке E(a;b) имеем вид:

$$(x-a)^2+(y-b)^2 = R^2. \qquad (6)$$

Так как CD является диаметром искомой окружности, то ее центр E есть середина отрезка CD. Воспользовавшись формулами деления отрезка пополам, получим:

$$x_E=\frac{x_C+x_Д}{2}=\frac{10+2}{2}=6,\quad y_E=\frac{y_C+y_Д}{2}=\frac{6+0}{2}=3.$$

Следовательно, E(6;3) и $R=\frac{СД}{2}=5$. Используя формулу (6), получаем уравнение искомой окружности:

$$(x-6)^2+(y-3)^2=25.$$

6. Множество точек треугольника ABC есть пересечение трех полуплоскостей, первая из которых ограничена прямой AB и содержит точку C, вторая ограничена прямой AC и содержит точку B.

Для получения неравенства, определяющего полуплоскость, ограниченную прямой AB и содержащую точку C, подставим в уравнение прямой AB координаты точки C:

$$4\cdot 10+3\cdot 6-8=50>0.$$

Поэтому искомое неравенство имеет вид: $4x+3y-8\geq 0$.

Для составления неравенства, определяющего полуплоскость, ограниченную прямой BC и содержащую точку A, найдем уравнение прямой BC, подставив в формулу (2) координаты точек B и C:

$$\frac{x-5}{10-5}=\frac{y-(-4)}{6-(-4)},\quad \frac{x-5}{5}=\frac{y+4}{10},\quad \frac{x-5}{1}=\frac{y+4}{2},$$

$$2x-y-14=0 \ \text{(BC)}.$$

Подставив в последнее уравнение координаты точки A, имеем: $2\cdot(-4)-8-13=-30<0$. Искомое неравенство будет $2x-y-14\leq 0$. Подобным образом составим неравенство, определяющее полуплоскость, ограниченную прямой AC и содержащую точку B: $5+7\cdot(-4)-52=75<0$. Третье искомое неравенство $x+7y-52 \le 0$. Итак, множество точек треугольника ABC определяется системой неравенств

$$\begin{cases} 4x + 3y - 8 \ge 0, \\ 2x - y - 14 \le 0, \\ x + 7y - 52 \le 0. \end{cases}$$

На рис. 1 в декартовой прямоугольной системе координат xOy изображен треугольник ABC, высота CD, окружность с центром в точке E.

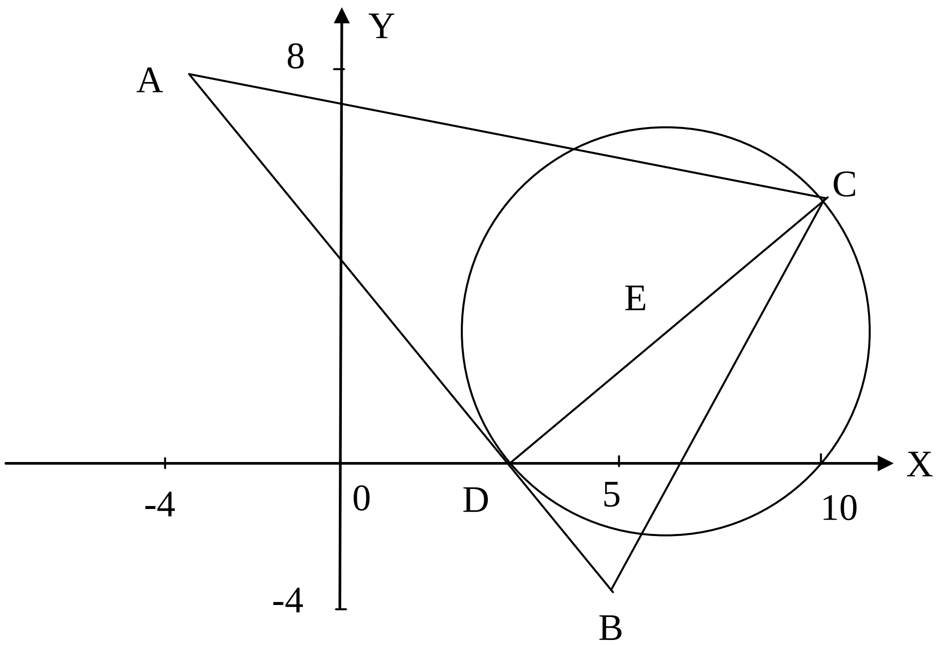


Рис. 1. К задаче 1

**Задача 2.** Составить уравнение линии, для каждой точки которой отношение расстояний до точки A(3; 0) и до прямой x=12 равно числу ε=0,5. Полученное уравнение привести к простейшему виду и построить кривую.

*Решение*. Пусть M(x; y) - текущая (произвольная) точка искомого геометрического множества точек. Опустим перпендикуляр MB на прямую $x$ = 12 (рис. 2). Тогда B(12; y). По условию задачи $\dfrac{MA}{MB} = \dfrac{1}{2}$. По формуле (1) из предыдущей задачи

$$\text{MA}=\sqrt{(x-3)^2 = (y-0)^2},\ \text{MB}=\sqrt{(x-12)^2 + (y-y)^2}.$$

Тогда

$$\frac{\sqrt{(x-3)^2+y^2}}{\sqrt{(x-12)^2}}=\frac{1}{2}, \quad \frac{x^2-6x+9+y^2}{x^2-24x+144}=\frac{1}{4},$$

$$4x^2-24x+36+4y^2=x^2-24x+144, \quad 3x^2+4y^2=108,$$

$$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{27}=1.$$

Полученное уравнение представляет собой эллипс вида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, где a=6, b=$3\sqrt{3}$.

Определим фокусы эллипса $F_1(-c;\ 0)$ и $F_2(c;\ 0)$. Для эллипса справедливо равенство $b^2=a^2-c^2$, откуда

$$c^2=a^2-b^2=9 \text{ и } c=3.$$

То есть, $F_1(-3;\ 0)$ и $F_2(3;\ 0)$-фокусы эллипса (точки $F_2$ и A совпадают).

Эксцентриситет эллипса $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

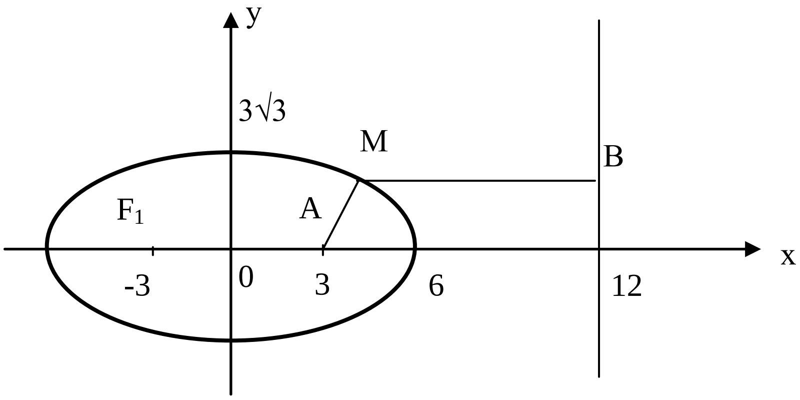


Рис. 2. К задаче 2

**Задача 3.** Составить уравнение линии, для каждой точки которой ее расстояние до точки A(3;-4) равно расстоянию до прямой y=2. Полученное уравнение привести к простейшему виду и построить кривую.

*Решение*. M(x; y)– текущая точка искомой кривой. Опустим из точки M перпендикуляр MB на прямую y=2 (рис.3). Тогда B(x;2). Так как MA=MB, то

$$\sqrt{(x-3)^2+(y+4)^2}=\sqrt{(x-x)^2+(y-2)^2}$$

или

$$(x-3)^2+y^2+8y+16=y^2-4y+4,$$

$$-12y-12=(x-3)^2,$$

$$y+1=-\frac{1}{12}(x-3)^2.$$

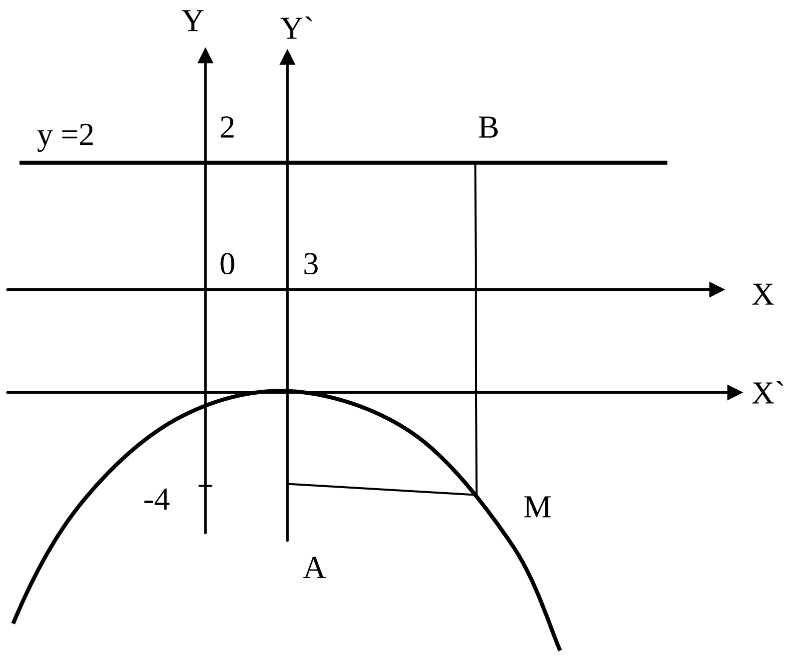


Рис. 3. К задаче 3

Полученное уравнение определяет параболу с вершиной в точке O`(3; -1). Для приведения уравнения параболы к простейшему (каноническому) виду положим $x-3=X`$, $y+1=Y`$. Тогда в системе координат X`O`Y` уравнение параболы принимает следующий вид: $Y`=-\frac{1}{12}(X`)^2$. В системе координат X`O`Y` строим параболу.

## Тема 2. Векторная алгебра и аналитическая геометрия в пространстве

**Задача 4.** Даны координаты трех точек: A(3; 0; -5), B(6; 2; 1), C(12;-12;3).

Требуется: 1) записать векторы AB и AC в системе орт и найти модули этих векторов; 2) найти угол между векторами AB и AC; 3) составить уравнение плоскости, проходящей через точку C перпендикулярно вектору $\overrightarrow{AB}$.

Решение. 1. Если даны точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, то вектор $\overline{M_1M_2}$ через орты $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ выражается следующим образом:

$$\overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}. \qquad (1)$$

Подставляя в эту формулу координаты точек А и В, имеем:

$$\overrightarrow{AB} = (6-3)\vec{i} + (1+5)\vec{k} + (2-0)\vec{j} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 6\vec{k}.$$

Подобным образом $\overrightarrow{AC} = (12-3)\vec{i} + (-12-0)\vec{j} + (3+5)\vec{k} = 9\vec{i} - 12\vec{j} - 8\vec{k}$. Модуль вектора $\overline{M_1M_2}$ вычисляется по формуле

$$\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| = \sqrt{a_x + a_y + a_z}. \ (2)$$

Подставляя в формулу (2) найденные ранее координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, находим их модули:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{3^2 + 2^2 + 6^2} = 7; \quad \left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{9^2 + (-12)^2 + 8^2} = 17.$$

2. Косинусы угла $\alpha$, образованного векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен их скалярному произведению, деленному на произведение их модулей.

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}. \qquad (3)$$

Так как скалярное произведение двух векторов, заданных своими координатами, равно сумме попарных произведений одноименных координат то, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 3 \cdot 9 + 2 \cdot (-12) + 6 \cdot 8 = 51$. Применяя (3) имеем

$$\cos\alpha = \cos\left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}\right) = \frac{51}{7 \cdot 17} \approx 0{,}4286 \ \ \alpha \approx 64°37'.$$

3. Известно, что уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_{0,} y_{0,} z_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}\{A; B; C\}$, имеет вид

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \qquad (4)$$

По условию задачи искомая плоскость проходит через точку С(12;-12;3) перпендикулярно вектору $\overrightarrow{AB}\{3;2;6\}$. Подставляя в (4) А=3, В=2, С=6, $x_0 = 12$, $y_0 = -12$, $z_0 = 3$ получим:

3(x-12)+2(y+12)+6(z-3)=0. 3x+2y+6z-30=0- искомое уравнение плоскости.

## Тема 3. Элементы линейной алгебры

**Задача 5.** Данную систему уравнений записать в матричной форме и решить ее с помощью обратной матрицы:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 8 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases}$$

Решение. Обозначим через А – матрицу коэффициентов при неизвестных; X – матрицу-столбец неизвестных $x_1, x_2, x_3$; H – матрицу-столбец свободных членов:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \; H = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

С учетом этих обозначений данная система уравнений примет следующую матричную форму:

$$A \cdot X = H. \qquad (1)$$

Если матрица А –невырожденная (ее определитель отличен от нуля ) то она имеет обратную матрицу $A^{-1}$. Умножив обе части уравнения (1) на $A^{-1}$ получим:

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A \cdot H.$$

Но $A^{-1} \cdot A = E$ (Е – единичная матрица), а $EX = X$, поэтому

$$X = A^{-1} \cdot H. \qquad (2)$$

Равенство (2) называется матричной записью решения системы линейных уравнений. Для того чтобы нахождение решения системы необходимо вычислить следующую матрицу.

Пусть имеем невыраженную матрицу $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$. Тогда

$A^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{12}}{\Delta} & \frac{A_{13}}{\Delta} \\ \frac{A_{21}}{\Delta} & \frac{A_{22}}{\Delta} & \frac{A_{23}}{\Delta} \\ \frac{A_{31}}{\Delta} & \frac{A_{32}}{\Delta} & \frac{A_{33}}{\Delta} \end{bmatrix}$ где $A_{11}(i=1,2,3;\ j=1,2,3)$ -алгебраическое дополнение элемента $a_{11}$ в определителе матрицы А, которое является произведением $(-1)^{i+j}$ минор определитель второго порядка, полученный вычеркиванием $i$-й строки и $j$-го столбца в определители матрицы А.

Вычислим определитель $\Delta$ и алгебраические дополнения $A_{11}$ элементов матрицы А.

$\Delta=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}=10\neq 0$ - следовательно матрица А имеет обратную матрицу $A^{-1}$.

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}=5, A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}=-5.$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}=-5, A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}=3$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}=1, A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}=-1$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}=-1, A_{32}=(-1)^{3++2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}=3$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}=\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}=7$$

Тогда

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{3}{10} & \frac{3}{10} & \frac{-1}{10} \\ \frac{-3}{10} & \frac{1}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{-3}{10} & \frac{-1}{10} & \frac{7}{10} \end{bmatrix}=\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & 3 \\ -3 & -1 & 7 \end{pmatrix},$$

По формуле (2) находим решение данной системы уравнений в матричной форме:

$$X=A^{-1}\cdot H=\frac{1}{10}\cdot\begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ -5 & 1 & 3 \\ -5 & -1 & 7 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix}=\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 30 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Отсюда $x_1=3,\ x_2=0,\ x_3=-2.$

## Тема 4. Введение в анализ

**Задача 6**. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{4x^2+11x-3}{3x^2+10x+3}$, б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-x\right)$

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{arctg\,5x}$ г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-3}{2x+1}\right)^{4x+3}$.

*Решение.* а) Подстановка предельного значения аргумента x=-3 приводит к неопределенному выражения вида $\frac{0}{0}$.

Для устранения этой неопределенности разложим числитель и знаменатель дроби на множители и сократим дробь на множитель *(x+3)*. Такое сокращение здесь возможно, так как множитель (x+3) отличен от нуля при $x\to -3$:

$$\lim_{x\to -3}\frac{4x^2+11x-3}{3x^2+10x+3}=\lim_{x\to -3}\frac{(4x-1)(x+3)}{(3x+1)(x+3)}=\lim_{x\to -3}\frac{(4x-1)}{(3x+1)}=$$

$$= \frac{4\cdot(-3)-1}{3\cdot(-3)+1} = \frac{13}{8}.$$

б) При $x \to \infty$ выражение $\sqrt{x^2+3x} - x$ дает неопределенность вида $\infty - \infty$. Для её устранения умножим и разделим это выражение на $\left(\sqrt{x^2+3x} + x\right)$:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3x} - x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+3x} - x\right)\left(\sqrt{x^2+3x} + x\right)}{\left(\sqrt{x^2+3x} + x\right)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3x-x^2}{\sqrt{x^2+3x}+x} = \lim_{x\to\infty}\frac{3}{\sqrt{1+\frac{3}{x}}+1} = \frac{3}{2}.$$

в) Обозначим *arctg 5x = y*. Тогда *5x = tg y* и $y \to 0$ при $x \to 0$. Применяя свойство пределов и формулу первого замечательного предела $\lim\limits_{a\to 0}\frac{\sin a}{a} = 1$, имеем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x}{arctg\,5x} = \frac{2}{5}\lim_{y\to 0}\frac{tgy}{y} = \frac{2}{5}\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}\lim_{y\to 0}\frac{1}{\cos y} = \frac{2}{5}\cdot 1\cdot 1 = \frac{2}{5}.$$

г) При $x \to \infty$ выражение $\left(\frac{2x-3}{2x+1}\right)^{4x+5}$ является неопределенностью вида $1^\infty$. Для устранения этой неопределенности представим основание степени в виде суммы 1 и бесконечно малой при $x \to \infty$ величины и применим формулу второго замечательного предела:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Тогда имеем:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-3}{2x+1}\right)^{4x+3} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1-4}{2x+1}\right)^{4x+3} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-4}{2x+1}\right)^{4x+3}.$$

Пусть 2x+1 = -4 y. Тогда 4x+5 = -8y+3 и $y \to \infty$ при $x \to \infty$. Переходя к переменной *y,* получим:

$$\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{-8y+3}=\left[\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\right]^{-8}\cdot\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{3}=e^{-8}\cdot 1^{3}=\frac{1}{e^{8}}.$$

## *Производная. Таблица основных формул дифференцирования*

I. Общие правила дифференцирования:

1. $y=u+v-w \Rightarrow y'=u'+v'-w'$ (для алгебраической суммы);

2. $y=u\cdot v \quad \Rightarrow y'=u'v+v'u$ (для произведения функций);

3. $y=cu(x) \Rightarrow y'=cu'$ ($c$ = const) (для постоянной величины);

4. $y=\dfrac{u}{v} \quad \Rightarrow y'=\dfrac{u'v-v'u}{v^2}$ (для частного);

5. Сложная функция $y=f(u)$, $u=\varphi(x)\Rightarrow y'_x=f'_u(u)\cdot\varphi'_x(x)$;

6. Обратная функция $y=f(x)$, $x=f(y)\Rightarrow y'_x=\dfrac{1}{x'_y}$;

7. Постоянная величина $y=c \Rightarrow y'=0$, $c$=const;

Степенная функция:

8. $y=x^n \Rightarrow y'=x^{n-1}$, в частности,

8.1 $y=\sqrt{x} \Rightarrow y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$; 8.2. $y=\dfrac{1}{x} \Rightarrow y'=-\dfrac{1}{x^2}$;

Тригонометрические функции:

9. $y=\sin(x) \Rightarrow y'=\cos(x)$; 10. $y=\cos(x) \Rightarrow y'=-\sin(x)$;

11. $y=\mathrm{tg}(x)\Rightarrow y'=\dfrac{1}{\cos^2(x)}$; 12. $y=\mathrm{ctg}(x) \Rightarrow y'=-\dfrac{1}{\sin^2(x)}$;

Обратные тригонометрические функции:

13. $y=\arcsin(x)\Rightarrow y'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; 14. $y=\arccos(x) \Rightarrow y'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

15. $y=\mathrm{arctg}(x) \Rightarrow y'=\dfrac{1}{1+x^2}$; 16. $y=\mathrm{arcctg}(x)\Rightarrow y'=-\dfrac{1}{1+x^2}$;

Показательная функция:

17. $y=a^x\Rightarrow y'=a^x\ln a$, в частности, 17.1. $y=e^x \Rightarrow y'=e^x$;

Логарифмическая функция :

18. $y=\log_a x \Rightarrow y'=\frac{1}{x}\log_a e$, в частности, 18.1. $y=\ln x \Rightarrow y'=\frac{1}{x}$.

**Задача 7**. Исследовать на непрерывность функцию $y=\frac{2}{x-1}$.

*Решение.* Данная функция является *элементарной.* Известно, что всякая элементарная функция непрерывна на своей области определения. Данная функция определена на интервалах $(-\infty;1)$ *и* $(1;\infty)$ и, следовательно, она непрерывна на этих интервалах. В точке x=1 функция имеет разрыв второго рода, поскольку в этой точке отсутствуют конечные односторонние пределы. График функций дан на рис. 4.

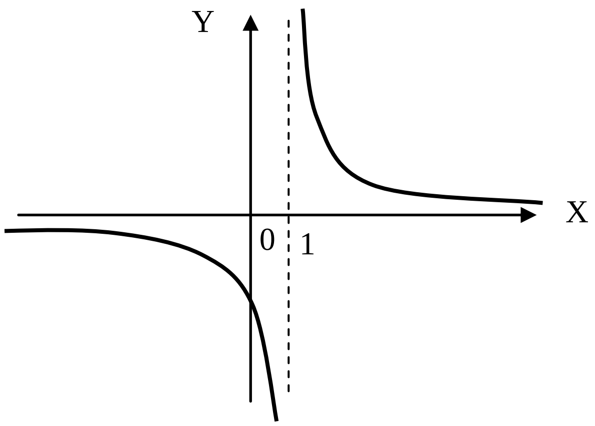


Рис. 4. К задаче 7

## Тема 5. Дифференциал

**Задача 8.** Найти производную функции:

а) $y=\ln(2+\sin 3x)$; *б*) $y=(3^{arktg\sqrt{x}}+1)^4$; *в*) $\cos(xy^2)-3y^2+4y=0$.

*Решение:* а) Последовательно применяем правило дифференцирования сложной функции, правила и формулы дифференцирования, имеем:

$$y'=\left[\ln(2+\sin 3x)\right]'=\frac{1}{2+3\sin 3x}(2+3\sin 3x)'=$$

$$=\frac{1}{2+\sin 3x}\left[2'+(\sin 3x)'\right]=\frac{1}{2+3\sin 3x}\cos 3x(3x)'=\frac{3\cos 3x}{2+\sin 3x};$$

б) $y'=\left[(3^{arktg\sqrt{x}}+1)^4\right]'=4(3^{arktg\sqrt{x}}+1)^3\cdot(3^{arktg\sqrt{x}}+1)'=$

$$=4(3^{arktg\sqrt{x}}+1)^3\cdot 3^{arktg\sqrt{x}}\cdot\ln 3\cdot(ark\sqrt{x})'=$$

$$=4(3^{arktg\sqrt{x}})^3\cdot 3^{arktg\sqrt{x}}\cdot\ln 3\cdot\frac{1}{1+(\sqrt{x})^3}(x^{\frac{1}{2}})'=\frac{2\ln 3}{(1+x)\sqrt{x}}\cdot 3^{arktg\sqrt{x}}\cdot(3^{arktg\sqrt{x}}+1)^3.$$

в) В данном случае функциональная зависимость задана в неявной форме. Для нахождения производной $y'$ нужно продифференцировать по переменой x обе части уравнения считая при этом y функции от x, а затем полученное уравнение разрешить относительно $y'$:

$$-\sin(xy^2)(xy^2)'-6yy'+4=0,$$
$$-\sin(xy^2)(y^2+2xyy')-6yy'+4=0,$$
$$-y^2\sin(xy^2)-2xyy'\sin(xy^2)-6yy'+4=0$$

Из последнего уравнения находим $y'$:

$$2yy'\left[x\sin(xy^2)+3\right]=4-y^2\sin(xy^2),\; y'=\frac{4-y^2\sin(xy^2)}{2y\left[x\sin(xy^2)+3\right]}.$$

## Тема 6. Приложения производной

**Задача 9.** Исследовать функцию $y=\frac{2x-1}{(x-1)^2}$ и построить её график.

Решение: Исследование функции проведем по следующей схеме:

1. Найдем область определения функции.
2. Исследуем функцию на непрерывность.
3. установим, является ли данная функция четно, нечетной.
4. Найдем интервалы возрастания и убывания функции и точки экстремума.
5. Найдем интервалы выпуклости и вогнутости кривой и её точки перегиба.
6. Найдем асимптоты кривой.

Реализуем указанную схему:

1. Функция определена при всех значениях аргумента x, кроме x=1.

2. Данная функция является элементарной, поэтому она непрерывна на своей области определения т. е. на интервалах (-∞; 1) и (1; ∞). В точке x=1 функция терпит разрыв второго рода.

3. Для установления четности или нечетности функции проверим выполнимость равенств f(-x) = f(x) (тогда f(x)-четная функция) или f(-x) = -f(x) (для нечетной функции) для любых x и –x из области определения функции:

$$f(-x) = \frac{-2x-1}{(-x-1)^2} \qquad\qquad -f(x) = -\frac{2x-1}{(x-1)^2},$$

следовательно, *f(-x)* $\neq$ *-f(x)* и *f(-x)* $\neq$ *-f(x),* то есть данная функция не является ни четной ни нечетной.

4. Для исследования функции на экстремум найдем ее первую производную:

$$y' = \frac{2(x-1)^2 - (2x-1)\cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} = -\frac{x}{(x-1)^2}.$$

Производная $y' = 0$ при $x = 0$ и $y'$ - не существует при x=1. Тем самым имеем две критические точки: $x_1 = 0,\ x_2 = 1$. Но точка $x_2 = 1$ не принадлежит области определения функции, экстремума в ней быть не может.

Разобьем числовую ось на три интервала (рис. 5): $(-\infty;0),(0;1),(1;\infty)$.

В первом и третьем интервалах первая производная отрицательна, следовательно, здесь функция убывает; во втором интервале – положительна и данная функция возрастает. При переходе через точку $x = 0$ первая производная меняет свой знак с минуса на плюс, поэтому в этой точке функция имеет минимум: $y_{\min} = y(0) = -1$. Значит, точка A(0;-1) – точка минимума функции.

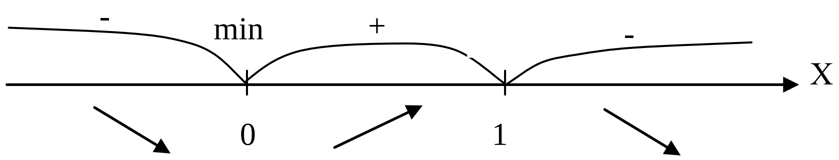


Рис. 5. Нахождение экстремума функции

На рис. 5 знаками +, - указаны интервалы знакопостоянства производной $y'$, а стрелками – возрастание и убывание исследуемой функции.

5. Для определения точек перегиба графика функции и интервалов выпуклости и вогнутости кривой найдем вторую производную:

$$y'' = -\frac{(x-1)^3 - x\cdot 3(x-1)^{3}}{(x-1)^6} = \frac{2x+1}{(x-1)^6}.$$

Вторая производная равна нулю ( $y''=0$ ) при $x=-\frac{1}{2}$ и $y''$ - не существует при $x=1$. Разобьем числовую ось на три интервала (рис. 6); $(-\infty;-\frac{1}{2})$, $(-\frac{1}{2};1)$, $(1;\infty)$. На правом интервале вторая производная $y''$ отрицательна и дуга исследуемой кривой выпукла; на втором и третьем интервалах $y''>0$, тем самым график является вогнутым. При переходе через точку $x=-\frac{1}{2} y''$ меняет свой знак, поэтому $x=-\frac{1}{2}$ - абсцисса точки перегиба.

Следовательно, $B\left(-\frac{1}{2};-\frac{8}{9}\right)$- точка перегиба графика функции.

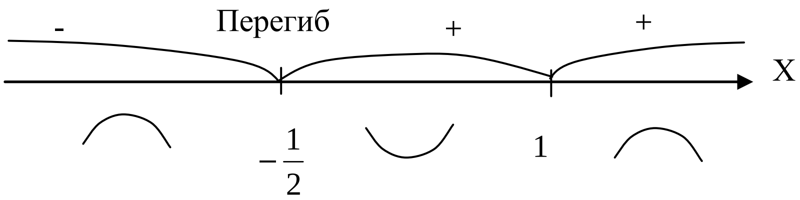


Рис. 6. Определение перегиба графика функции

6. $x=1$ - точка разрыва функции, причем $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x-1}{(x-1)^2}=\infty$.

Поэтому прямая $x=1$ является вертикальной асимптотой графика. Для определения уравнения наклонной асимптоты $y=kx=b$ воспользуемся формулами:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}, b=\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-kx\right].$$

Тогда

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{2x-1}{(x-1)^2\cdot x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{1}{x}}{(x-1)^2}=0$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\frac{2x-1}{(x-1)^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{2(x-1)}=0$$

При вычисления последнего предела использовалось правило Лопиталя.

Значит, прямая $y=0$ есть горизонтальная асимптота графика исследуемой функции, представленного на рис. 7.

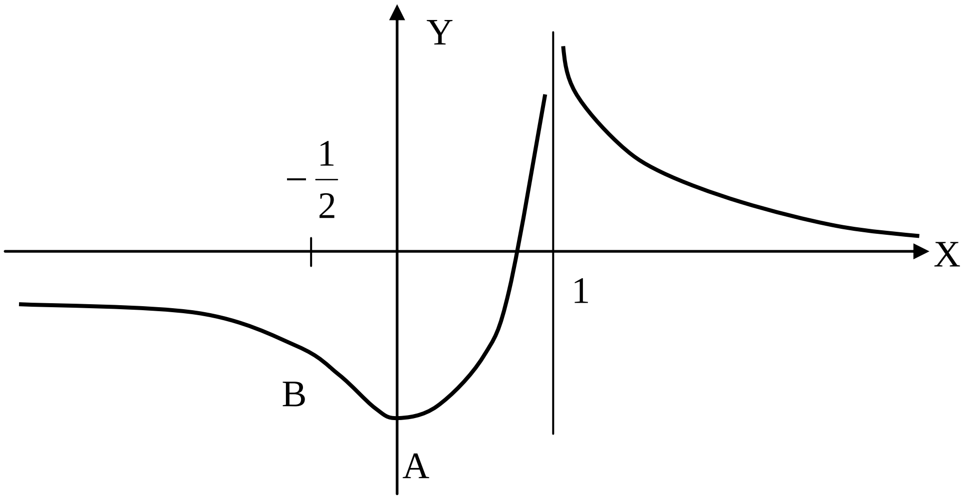


Рис. 7. К задаче 9

**Задача 10.** Резервуар, имеющий форму открытого сверху прямоугольного параллелепипеда дном, нужно вылудить внутри оловом. Каковы должны быть размеры резервуара при его емкости 108 л воды, чтобы затраты на его лужение были наименьшими?

Решение. Затраты на покрытие резервуара оловом будут наименьшими, если при данной вместимости его поверхность будет минимальной.

Обозначим через $a_{ДМ}$ - сторону основания, $b_{ДМ}$ - высоту резервуара. Тогда площадь S его поверхности равна $a^2=4ab$, а объем $V=a^2b=108$. Отсюда $b=\frac{108}{a^2}$ и $S=a^2=4ab=a^2+\frac{432}{a}$.

Полученное соотношение устанавливает зависимость между поверхности резервуара S (функция) и стороной основания $a$ (аргумент). Исследуем функцию $S$ на экстремум. Найдем первую производную $S'$, приравняем ее к нулю и решим полученное уравнение:

$$S' = 2a - \frac{432}{a^2} = \frac{2a^3 - 432}{a^2} = 0.$$

Отсюда $a = 6$. $S'(a) > 0$ при $a > 6$, $S'(a) < 0$ при $a < 6$. Следовательно, при $a = 6$ функция $S$ имеет минимум. Если $a = 6$ ,то $b = 3$. Таким образом, затраты на лужение резервуара емкостью 108 л будут наименьшими, если он имеет размеры $6ДМ \times 6ДМ \times 3ДМ$ .

## Тема 7. Неопределенный интеграл

$\int f(x)dx = F(x) + C$ - неопределенный интеграл.

***Таблица интегралов***

1° $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ кроме\ n = -1;$

2° $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$ ;

3° $\int \cos x dx = \sin x + C$;

4° $\int \sin x dx = -\cos + C$;

5° $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$ ;

6° $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$;

7° $\int e^x dx = e^x + C$;

8° $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ ;

9° $\int \frac{dx}{1 + x^2} = arctgx + C$;

10° $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x + C$ .

11° $\int tgxdx = -\ln|\cos x| + C$

12° $\int ctgxdx = \ln|\sin x| + C$

13° $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg\, \frac{x}{a} + C$

14° $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a + x}{a - x}\right| + C$

15° $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$

16° $\int [f_1(x) \pm f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$.

17° $\int a \cdot f(x)dx = a\int f(x)dx + C$

18° $\int f(x + b)dx = F(x + b) + C$

19° $\int f(ax + b)dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + C$ .

*Пример 10.*

$$\int\left(2x^3-3\sin x+5\sqrt{x}\right)dx=\text{ в силу правила о сумме}$$

$$=\int 2x^3dx-\int 3\sin xdx+\int 5\sqrt{x}dx=2\int x^3dx-3\int\sin xdx+5\int x^{\frac{1}{2}}dx=$$

$$=2\cdot\frac{x^{3x+1}}{3+1}-3(-\cos x)+5\cdot\frac{x^{\frac{1}{2}}+1}{\frac{1}{2}+1}+C=\frac{1}{2}x^4+3\cos x+\frac{10}{3}x\sqrt{x}+C.$$

*Пример 11.*

$$\int\sqrt{\sin x}\cdot\cos xdx=\left|\sin x=t,\cos xdx=dt\right|=\int\sqrt{t}dt=\int t^{\frac{1}{2}}dt=\frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+C=$$

$$\frac{2}{3}^{t\sqrt{t}}+C=\frac{2}{3}\sin t\sqrt{\sin t}+C.$$

*Пример 12.*

$$\int\frac{xdx}{1+x^2}=\left|1+x^2=t,2xdx=dt,xdx=\frac{dt}{2}\right|=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t}=\frac{1}{2}\ln|t|+C=\frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right|+C.$$

*Пример 4.*

$$\int(\ln x)^3\frac{dx}{x}=\left|\ln x=t,\frac{dx}{x}=dt\right|=\int t^3dt=\frac{t^4}{4}+C=\frac{1}{4}(\ln x)^4+C.$$

*Пример 13.*

Вычислить интеграл $\int\frac{dx}{2x^2+8x+20}$.

$$I=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+4x+10}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+2\cdot 2x+4+10-4}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x+2)^2+6}=$$

$$=\left|x+2=t,dx=dt\right|=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+\left(\sqrt{6}\right)^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}arctg\frac{t}{\sqrt{6}}+C=\frac{1}{2\sqrt{6}}arctg\frac{x+2}{\sqrt{6}}+C.$$

*Пример 14.*

$$\int x\sin xdx = \left| \begin{matrix} u = x, du = dx \\ dv = \sin xdx \\ \int dv = \int \sin xdx \Rightarrow v = -\cos x \end{matrix} \right| = x\cdot(-\cos x) + \int \cos x \cdot dx =$$

$= -x\cdot(\cos x) + \sin x + C.$

*Пример 15.* Требуется вычислить $\int \mathrm{arctg} xdx$.

Положим $u = \mathrm{arctg} x \rightarrow du = \dfrac{dx}{1+x^2} \Rightarrow dv = dx \rightarrow v = x$, тогда

$$\int \mathrm{arctg} xdx = x\cdot \mathrm{arctg} xdx - \int \frac{x}{1+x^2}dx = \left| \begin{matrix} 1+x^2 = t \\ 2xdx = dt \\ xdx = \dfrac{dt}{2} \end{matrix} \right| = x\cdot \mathrm{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} =$$

$= x\cdot \mathrm{arctg} x - \dfrac{1}{2}\ln|t| + c = x \mathrm{arctg} xdx - \dfrac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right| + c.$

*Пример 16.* Проинтегрировать $\int x^2 e^x dx$.

Применим формулу интегрирования по частям.

$\left| \begin{matrix} u = x^2 \rightarrow du = 2xdx \\ e^x dx = dv \rightarrow v = e^x \end{matrix} \right|$, тогда наш интеграл равен

$= x^2 e^x - 2\int xe^x dx =$, опять применим формулу интегрирования по частям для второго слагаемого $\left| \begin{matrix} u = x \rightarrow du = dx \\ e^x dx = dv \rightarrow v = e^x \end{matrix} \right|$, тогда имеем

$$= x^2 e^x - 2xe^x + 2\int e^x dx = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + C = e^x\left(x^2 - 2x + 2\right) + C.$$

## Тема 8. Определенный интеграл. Свойства определенного интеграла

### Справочный материал

1) $\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx, \quad где\ \alpha - некоторое\ число,$

2) $\int\limits_a^b \left( f(x) \pm g(x) \right) dx = \int\limits_a^b f(x)dx \pm \int\limits_a^b g(x)dx,$

3) $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx,$ 4) $\int\limits_a^a f(x)dx = 0,$ 5) $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx,$

6) Если функция *y = f(x)* – четная, то $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int\limits_0^a f(x)dx$, если функция *y = f(x)* – нечетная, то $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 0.$

7) Формула Ньютона-Лейбница: $\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

8) Замена переменной в определенном интеграле:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \begin{vmatrix} x = \varphi(t),\ x \in [a,b] \\ dx = \varphi'(t)dt,\ t \in [\alpha,\beta] \end{vmatrix} = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\,.$$

9) Интегрирование по частям определенного интеграла: $\int\limits_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b vdu$

**Задача 17.** Вычисление определенного интеграла используя его свойства:

$$\int\limits_1^2 \frac{3x^4 - 5x^2 + 7}{x} dx$$

Решение:

$$\int\limits_1^2 \frac{3x^4 - 5x^2 + 7}{x} dx = \int\limits_1^2 \left(3x^3 - 5x + \frac{7}{x}\right) dx = \frac{3x^4}{4}\Bigg|_1^2 - \frac{5x^2}{2}\Bigg|_1^2 + 7\ln|x|\Big|_1^2 = \frac{3}{4}(16-1) - \frac{5}{2}(4-1) + 7(\ln 2 - \ln 1)$$

$= \dfrac{15}{4} + 7\ln 2 = 3\dfrac{3}{4} + 7\ln 2$. При решении этого примера сначала почленно поделили числитель на знаменатель, применив свойства определенного интеграла, и получили три табличных интеграла.

**Задача 18.** Вычисление определенного интеграла с помощью подстановки:

$$\int\limits_0^{\ln 2} e^x \sqrt{e^x - 1} dx$$

Решение:

$$\int_0^{\ln 2} e^x\sqrt{e^x-1}dx=\left|\begin{array}{l}\text{Введем новую переменную } t=\sqrt{e^x-1}, \quad t^2=e^x-1, \;\; e^x=t^2+1, \\ e^x dx=2tdt,\; dx=\dfrac{2tdt}{e^x} \\ \text{Найдем пределы интегрирования переменной } t: \text{ если } x=0, \\ \text{то } t=\sqrt{e^0-1}=0, \quad \text{если } x=\ln 2, \text{ то } t=\sqrt{e^{\ln 2}-1}=1\end{array}\right|=$$

$$=\int_0^1 \left(t^2+1\right)t\frac{2t}{t^2+1}dt=2\int_0^1 t^2dt=2\frac{t^3}{3}\bigg|_0^1=\frac{2}{3}.$$

**Задача 19.** Вычисление определенного интеграла методом интегрирования по частям $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos xdx$.

Решение.

$$в)\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos xdx=\left|\begin{array}{l}\text{Воспользуемся формулой} \\ \text{интегрирования по частям} \\ u=x, \quad du=dx; \\ dv=\cos xdx,\; v=\sin x.\end{array}\right|=x\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin xdx=\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}-0+\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=$$

$$=\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{2}-\cos 0=\frac{\pi}{2}-1$$

## Тема 9. Определенный интеграл. Геометрические приложения определенного интеграла

## Справочный материал

*Площадь плоских фигур***.**

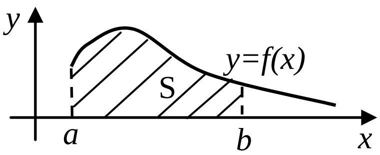


Рис. 8.

1. Если функция *y=f(x)* неотрицательна на отрезке *[a,b]*, то площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривой *y=f(x)* и прямыми *x=a*, *x=b*, *y=0* (см.рис. 8) равна: $S=\int_a^b f(x)dx$.

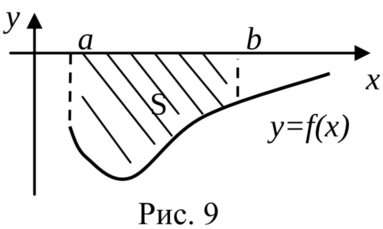


Рис. 9

2. Если функция *y=f(x)* неположительна на отрезке *[a,b]*, то площадь криволинейной трапеции над кривой *y=f(x)* на *[a,b]* равна: $S = -\int_a^b f(x)dx$ (см. рис. 9).

3. Площадь фигуры, заключенной между кривыми $y=f_1(x)$ и $y=f_2(x)$ на отрезке *[a,b]* равна:

$$S = \int_a^b \left( f_2(x) - f_1(x) \right) dx .$$

4. Если верхняя ограничивающая функция задана параметрически: $\begin{cases} x = \varphi(t),\ x \in [a,b], \\ y = \psi(t),\ t \in [\alpha, \beta] \end{cases}$, то площадь этой фигуры вычисляется по формуле:

$$S = \int_\alpha^\beta \psi(t)\varphi'(t)dt .$$

5. Если верхняя ограничивающая линия задана в полярных координатах уравнением $\rho = \rho(\varphi),\ \ \varphi \in [\alpha, \beta]$, то площадь этой фигуры вычисляется по формуле: $S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\varphi)d\varphi$.

*Длина дуги кривой***.**

6. Длина *L* дуги кривой *y=f(x)*, заключенной между точками с абсциссами *x=a, x=b,* определяется по формуле: $L = \int_a^b \sqrt{1 + \left( f' \right)^2} dx$.

7. Если функция задана параметрически: $\begin{cases} x = \varphi(t),\ x \in [a,b], \\ y = \psi(t),\ t \in [\alpha, \beta] \end{cases}$, то длина *L* дуги кривой находится по формуле: $L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt$.

8. ***Площадь поверхности вращения*** *вокруг оси Ox*: $S_x = 2\pi \int_a^b f \sqrt{1 + \left( f' \right)^2} dx$.

9. ***Объемы тел вращения***: $V_x = \pi \int_a^b y^2(x)dx$ - вокруг оси Ох,

$$V_y = \pi \int_c^d x^2(y)dy$$ - вокруг оси Оу.

**Задача 20.** Вычисление площадей фигур ограниченных линиями:

*а*) $y = 3x^2 + 1, \quad y = 3x + 7;$

*б*) $y = x^2, \; y = \dfrac{1}{x}, \; y = 0, \; x = 2;$

*в*) $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t; \end{cases} \; t \in [0, 2\pi], \; y = 0;$

*г)* $y = x^2 + 4x, y = x + 4$

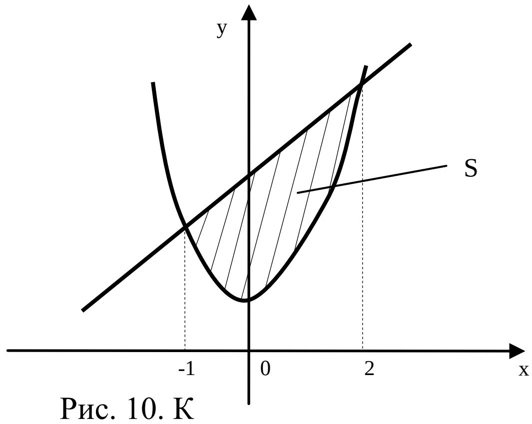

Рис. 10. К задаче 20

Решение.

а) Даны графики параболы и прямой, найдем абсциссы точек пересечения заданных функций. Для этого приравняем правые части уравнений: $3x^2 + 1 = 3x + 7, \quad 3x^2 - 3x - 6 = 0, \quad x^2 - x - 2 = 0,$ получили квадратное уравнение, решим его:

$$D = b^2 - 4ac; \quad D = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 1 + 8 = 9, \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}; \quad x_1 = \frac{-(-1) + \sqrt{9}}{2} = 2, \quad x_2 = -1$$

Площадь фигуры найдем, подставив данные $f_1(x) = 3x^2 + 1, \quad f_2(x) = 3x + 7$, $a$=-1, $b$=2 в формулу из п.3:

$$S = \int_{-1}^{2} (3x + 7 - 3x^2 - 1)dx = \int_{-1}^{2} (3x + 6 - 3x^2)dx = 3\left( \int_{-1}^{2} xdx + 2\int_{-1}^{2} dx - \int_{-1}^{2} x^2 dx \right) =$$

$$= 3\left( \frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{2} + 2x\Big|_{-1}^{2} - \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{2} \right) = 3\left( \frac{3}{2} + 6 - 3 \right) = 13.5 \; (кв.ед.)$$

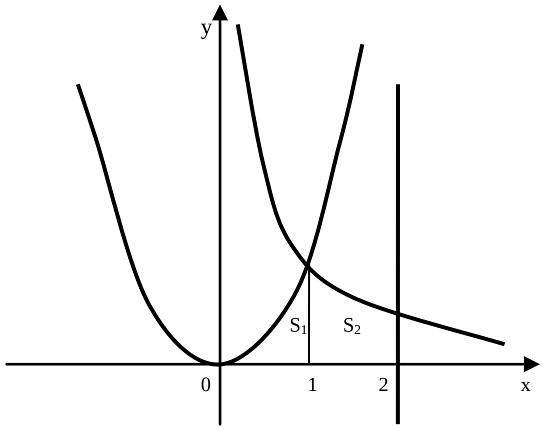

Рис. 11

б) Построим заданные графики параболы и гиперболы $y = x^2, \; y = \dfrac{1}{x}$, y=0 – это ось Ох, x=2 – это прямая параллельная оси Оу и проходящая через точку (2,0). Искомую площадь найдем как сумму двух площадей $S_1$, $S_2$ (см.рис. 11).

$S_1$- образована параболой, осью Ох и прямой, проходящей через точку пересечения параболы и гиперболы. Найдем эту точку, решив систему:

$$\begin{cases} y = x^2, \\ y = \dfrac{1}{x}; \end{cases} \quad x^2 = \frac{1}{x}; \quad x^3 = 1; \quad x = 1.$$

Тогда $S = \int_0^1 x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{3}.$

$S_2$- образована гиперболой, прямой проходящей через точку пересечения параболы и гиперболы и прямой х=2. $S = \int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln x\big|_1^2 = \ln 2$.

Искомая площадь S= $S_1$+ $S_2$=$\frac{1}{3} + \ln 2 \approx 1{,}03\ (\text{кв. ед.})$.

в) Уравнение циклоиды (см.рис. 12) задано параметрически $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t; \end{cases}$ $t \in [0, 2\pi]$, $y = 0$, поэтому воспользуемся формулой из п.4. Найдем $\varphi'(t) = x'_t = 1 - \cos t$, α=0, β=2π, тогда получаем:

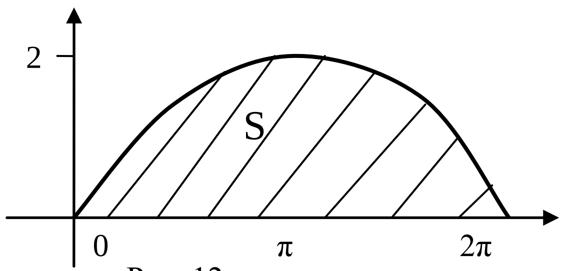

Рис. 12

$$L = \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 dt = \int_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos t + \cos^2 t\right) dt = = t\big|_0^{2\pi} - 2\sin t\big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt =$$

$$\left| \begin{array}{l} \textit{для вычисления оставшегося интеграла, воспользуемся} \\ \textit{формулой понижения степени } \cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2} \end{array} \right| = = 2\pi + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1 + \cos 2t) dt =$$

$$= 2\pi + \frac{1}{2}(t + \sin 2t)\Big|_0^{2\pi} = 2\pi + \pi = 3\pi \approx 9{,}4\ (\text{ед.})$$

*г)* Площадь S фигуры, ограниченной сверху и снизу непрерывными линиями $y = f(x)$ и $y = \varphi(x)$, пересекающимися в точках с абсциссами $x = a$ и $x = b$, определяется по формуле

$$S = \int_a^b [f(x) - \varphi(x)] dx \qquad (1)$$

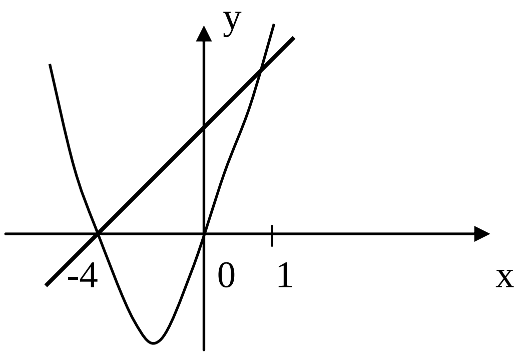


Рис. 13. К определению площади между двумя графиками

Для нахождения точек пересечения данных линий решаем систему уравнений

$$\begin{cases} y = x^2 + 4x \\ y = x + 4 \end{cases} \qquad x^2 + 4x = x + 4, \Rightarrow x^2 + 3x - 4 = 0,$$

откуда $x_1 = -4$, $x_2 = 1$.

Применяя формулу (1), получим:

$$S = \int_{-4}^{1} (x + 4 - x^2 - 4x)dx = \int_{-4}^{1} (4 - 3x - x^2)dx = \left[ 4x - \frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]$$

$$= 4 - \frac{3}{2} - \frac{1}{3} + 16 + \frac{48}{2} - \frac{64}{3} = 20\frac{5}{6} \text{ (кв. ед.).}$$

## Тема 10. Дифференциальные уравнения

**Задача 21**. Решить уравнение $y' - ytgx = -y^2 \cos x.$

Решение. Данное уравнение является уравнением Бернулли. Для его решения искомую функцию $y$ представим в виде произведения двух других функций: $u = u(x)$ и $v = v(x)$, то есть введем подстановку $y = u \cdot v$. Тогда $y' = u'v + uv'$ и данное уравнение примет вид:

$$u'v + uv' - uvtgx = -u^2v^2 \cos x$$

или

$$v(u' - utgx) + uv' = -u^2v^2 \cos x. \qquad (1)$$

Выберем функцию $u$ так, чтобы

$$u'-utgx=0$$

При подобном выборе функции $u$ уравнение (1) примет вид

$$uv'=-u^2v^2\cos x \text{ или } v'=-uv^2\cos x.$$

Решая (2) как уравнение с разделяющимися переменными, имеем:

$$\frac{du}{dx}=utgx,\ \frac{du}{u}=tgxdx,\ \ln u=-\ln\cos x,\ u=\frac{1}{\cos x}.$$

Здесь произвольная постоянная $C=0$. Подставляя найденное значение $u$ в уравнение (3), имеем:

$$\frac{du}{dx}=-\frac{1}{\cos x}\cdot v^2\cos x,\ \frac{dv}{-v^2}=dx,\ \frac{1}{v}=x+C,\ v=\frac{1}{x+C}.$$

Тогда $y=u\cdot v=\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{1}{x+C}=\frac{1}{(x+C)\cos x}$ - общее решение данного уравнения.

**Задача 22.** Найти частное решение уравнения $y''+4y=4\sin 2x-8\cos 2x$**,** удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=0, y'(0)=0$.

Решение. Общее решение y данного уравнения равно сумме общего уравнения $y_{одн}$ однородного уравнения и какого-либо частного решения, то есть

$$y=y_{одн}+\bar{y}.$$

Для нахождения $y_{одн}$ составим характеристическое уравнение $k^2+4=0$, имеющее комплексные корни $k_1=2i$ и $k_2=-2i.$ В этом случае общее решение однородного уравнения ищем в виде

$$y_{одн}=e^{ax}(C_1\cos\beta\ x+C_2\sin\beta\ x), \quad (4)$$

где $\alpha\pm\beta i$ - комплексные корни характеристического уравнения. Подставим в (4) $\alpha=0,\beta=0$, имеем:

$$y_{одн}=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x.$$

Для нахождения частного решения $\bar{y}$ неоднородного дифференциального уравнения воспользуемся следующей теоремой: если правая часть неоднородного уравнения есть функция $f'(x)=e^{ax}(a\cos\beta\ x+b\sin\beta\ x)$ и числа $a\pm\beta\ \ i$ не являются корнями характеристического уравнения, то существует частное решение $\overline{y} = xe^{ax}(A\cos\beta\, x + B\sin\beta\, x)$. Применяя эту теорему при $\alpha = 0, \beta = 2,$ имеем:

$$\overline{y} = x(A\cos 2\, x + B\sin 2\, x)$$

Дважды дифференцируя последнее равенство, находим $\overline{y''}$:

$$\overline{y''} = (4B - 4Ax)\cdot\cos 2x + (-4F - 4Bx)\cdot\sin 2x\,.$$

Подставив в данное уравнение $\overline{y}$ и $\overline{y''}$, получим:

$$4B\cdot\cos 2x - 4A\cdot\sin 2x = 4\sin 2x - 8\cos 2x,$$

откуда *A = - 1, B = - 2.*

Следовательно, $\overline{y} = -x(\cos 2x + 2\sin 2x)$ и $y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x - x(\cos 2x + 2\sin 2x).$

Найдем $y'$:

$$y' = -2C_1\sin 2x + 2C_2\cos 2x - \cos 2x - 2\sin 2x - x(-2\sin 2x + 4\cos 2x).$$

Используя начальные условия, получим систему

$$\begin{cases} C_1 = 0 \\ 2C_2 - 1 = 0, откуда C_1 = 0, C_2 = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

следовательно: $y = \dfrac{1}{2}\sin 2x - x(\cos 2x + 2\sin 2x)$, есть искомое частное решение данного дифференциального уравнения.

## Тема 11. РЯДЫ

**Задача 23.** Написать первые три члена ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{5^n x^n}{n^2 3^n}$, найти интервал сходимости ряда и исследовать его сходимость на концах интервала.

*Решение.* Беря последовательно $n = 1,2,3,...,$ запишем данный ряд в виде:

$$\frac{5x}{1^2\cdot 3} + \frac{5^2 x^2}{2^2\cdot 3^2} + \frac{5^3 x^3}{3^2\cdot 3^3} + ... + \frac{5^n x^n}{n^2\cdot 3^n} + ....$$

Для нахождения области сходимости ряда применим признак Даламбера

$$l\,im_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{5^{n+1}x^{n+1}n^2 3^n}{(n+1)^2 3^{n+1}5^n x^n}\right| =$$

$$=\frac{5}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}=\frac{5}{3}|x|.$$

Данный ряд сходится абсолютно при тех значениях x, которые удовлетворяют неравенству

$$\frac{5}{3}|x|<1\Rightarrow\left|x<\frac{3}{5}\right|\Rightarrow-\frac{3}{5}<x<\frac{3}{5}.$$

Исследуем сходимость ряда на концах полученного интервала. При $x=-\frac{3}{5}$ данный ряд принимает вид $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$. Последний ряд является знакочередующимся; абсолютная величина его общего члена стремится к нулю при $n\to\infty$. Следовательно, по признаку Лейбница сходимости знакочередующихся рядов этот ряд сходится. Значит, $x=-\frac{3}{5}$ принадлежит области сходимости данного ряда.

Пусть $x=\frac{3}{5}$ тогда заданный ряд примет вид $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. Исследуем сходимость этого ряда при помощи интегрального признака сходимости Коши. Рассмотрим несобственный интеграл

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2}=\lim_{b\leftarrow\infty}\int_1^{b}\frac{dx}{x^2}=\lim_{b\leftarrow\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^b=0+1=1.$$

Так как несобственный интеграл сходится, то сходится и исследуемый ряд. Значит, при $x=\frac{3}{5}$ исходный ряд сходится.

Таким образом, $-\frac{3}{5}\le x\le\frac{3}{5}$ - область сходимости данного ряда.

**Задача 24**. Вычислить $\int_0^1\frac{\sin\sqrt[3]{x}}{x}dx$ с точностью до 0,001.

Решение. Представим подынтегральную функцию в виде степенного ряда. Заменив $x$ в разложении функции $\sin x$ на $\sqrt[3]{x}$. имеем:

$$\sin\sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{x}-\frac{\left(\sqrt[3]{x}\right)^3}{3!}+\frac{\left(\sqrt[3]{x}\right)^5}{5!}-\frac{\left(\sqrt[3]{x}\right)^7}{7!}+\ldots.$$

Тогда $\frac{\sin\sqrt[3]{x}}{x}=x^{-\frac{2}{3}}-\frac{1}{3!}+\frac{x^{\frac{2}{3}}}{5!}-\frac{x^{\frac{4}{3}}}{7!}+\ldots$ и $\int\limits_0^1\frac{\sin\sqrt[3]{x}}{x}dx=\int\limits_0^1\left(x^{-\frac{2}{3}}-\frac{1}{3!}+\frac{x^{\frac{2}{3}}}{5!}-\frac{x^{\frac{4}{3}}}{7!}+\ldots\right)dx=$

$$=\left[3x^{\frac{1}{3}}-\frac{x}{3!}+\frac{3x^{\frac{5}{3}}}{5!}-\frac{3x^{\frac{7}{3}}}{7!}+\ldots\right]_0^1=3-\frac{1}{6}+\frac{1}{200}-\frac{1}{11760}+\ldots.$$

Полученный знакочередующийся ряд удовлетворяет условиям теоремы Лейбница. Так как четвертый его член по абсолютной величине меньше 0,001, то для обеспечения заданной точности вычислений достаточно взять первые три члена. Тогда

$$\int\limits_0^1\frac{\sin\sqrt[3]{x}}{x}dx\approx 3-\frac{1}{6}+\frac{1}{200}\approx 2{,}834.$$

## Тема 12. Повторные независимые испытания

**Задача 25.** Вероятность всхожести семян пшеницы равна 0,9. Какова вероятность того, что из четырех посеянных семян взойдут не менее трех?

Решение: Пусть событие А – из 4 семян взойдут не менее 3 семян; событие В – из 4 семян взойдет 4 семени. По теореме сложения вероятностей

$$P(A)=P(B)+P(C).$$

Вероятности Р(В) и Р(С) определим по формуле Бернулли, применяемой в следующем случае. Пусть проводится серия *n* независимых испытаний, при каждом из которых вероятность наступления события постоянна и равна *p*, а вероятность не наступления этого события равна *q=1-p*. Тогда вероятность того, что событие А в *n* испытаниях появится ровно *k* раз, вычисляется по формуле Бернулли

$$P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k},$$

где $C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}$ - число сочетаний из *n* элементов по *k*.

Тогда $P(B)=P_4(3)=C_4^3p^3q^{4-3}=\frac{4!}{3!(4-3)!}0{,}9^3 0{,}1=0{,}2916;$

$$P(C) = P_4(4) = C_4^4 p^4 q^{4-4} = 0{,}9^4 = 0{,}6561/$$

Искомая вероятность $P(A) = 0{,}2916 + 0{,}6561 = 0{,}9477$.

**Задача 26**. Вероятность всхожести семян пшеницы равна 0,9. Найти вероятность того, что из 400 посеянных семян взойдут 350 семян.

Решение:

Вычислить искомую вероятность $P_{400}(350)$ по формуле Бернулли затруднительно из-за громоздкости вычислений. Поэтому применим приближенную формулу, выражающую локальную теорему Лапласа:

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \phi(x),$$

где $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ - и $x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$.

Из условия задачи *p=0,9; q=1-0,9=0,1; n=400$ k=350.* Тогда $x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{350 - 400 \cdot 0{,}9}{\sqrt{400 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1}} = -\frac{10}{6} \approx -1{,}67$.

Из таблицы 1 приложений находим $\varphi(-1{,}67) = \varphi(1{,}67) = 0{,}0989$. Искомая вероятность равна

$$P_{400}(350) \approx \frac{1}{\sqrt{400 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1}} \cdot 0{,}0989 = 0{,}0165.$$

**Задача 27**. Среди семян пшеницы 0,02% сорняков. Какова вероятность того, что при случайном отборе 10 000 семян будет обнаружено 6 семян сорняков?

Решение.

Применение локальной теоремы Лапласа из-за малой вероятности *p=0,0002* приводит к значительному отклонению вероятности от точного значения $P_n(k)$. Поэтому при малых значениях *p* для вычисления $P_n(k)$ применяют асимптотическую формулу Пуассона

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}, \text{ где } e = 2{,}7182\ldots,\ \lambda = np.$$

Эта формула используется при $\lambda \le 10$, причем чем меньше *p* и больше *n*, тем результат точнее.

По условию задачи *p = 0,0002; n = 10000; k = 6*. Тогда $\lambda = 10000 \cdot 0{,}0002 = 2$ и

$$P_{10000}(6) \approx \frac{2^6}{6!} \cdot e^{-2} = \frac{64}{720} \cdot 0{,}1353 = 0{,}012.$$

**Задача 28**. Процент всхожести семян пшеницы равен 90%. Найти вероятность того, что из 500 посеянных семян взойдут от 400 до 440 семян.

Решение.

Если вероятность наступления события А в каждом из *n* испытаний постоянна и равна *p*, то вероятность $P_n(k_1 \le k \le k_2)$ того, что событие А в таких испытаниях наступит не менее $k_1$ раз и не более $k_2$ раз определяется по интегральной теореме Лапласа следующей формулой:

$$P_n(k_1 \le k \le k_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{x^2}{2}} dx,$$

$$\text{где } \alpha = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, \ \beta = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

Функция $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ называется функцией Лапласа. В приложениях (таблица 2) даны значения этой функции для $0 \le x \le 5$. При $x > 5$ функция $\Phi(x) = 0{,}5$. Для отрицательных значений *x* в силу нечетности функции Лапласа $\Phi(-x) = -\Phi(x)$. Используя функцию Лапласа, имеем

$$P_n(k_1 \le k \le k_2) \approx \Phi(\beta) - \Phi(\alpha).$$

По условию задачи *n = 500; p = 0,9; q = 0,1;* $k_1$*=400;* $k_2$ *= 440*. По приведенным выше формулам находим $\alpha$ и $\beta$:

$$\alpha = \frac{400 - 500 \cdot 0{,}9}{\sqrt{500 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1}} \approx -7{,}45; \ \beta = \frac{440 - 500 \cdot 0{,}9}{\sqrt{500 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1}} \approx -1{,}49.$$

Тогда

$$P_{500}(400 \le k \le 440) \approx \Phi(-1{,}49) - \Phi(-7{,}45) =$$

$$= -\Phi(1{,}49) + \Phi(7{,}45) = -0{,}4319 + 0{,}5 = 0{,}0681.$$

## Тема 13. Случайные величины и их числовые характеристики

**Задача 29.** Задан закон распределения дискретной случайной величины X:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| X | 40 | 42 | 41 | 44 |
| P | 0,1 | 0,3 | 0,2 | 0,4. |

Найти: 1) математическое ожидание M(X); 2) дисперсию D(X); 3) среднее квадратическое отклонение $\sigma$.

Решение.

1) Если закон распределения дискретной случайной величины задан таблицей

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| X | $x_1$ | $x_2$ | … | $x_n$ |
| P | $p_1$ | $p_2$ | … | $p_n$ |

Где в первой строке даны значения случайной величины X, а во второй – вероятности этих значений, то математическое ожидание M(X) вычисляется по формуле:

$$M(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + ... + x_n \cdot p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i \text{ .}$$

Тогда для нашего случая M(X)=40·0,1+42·0,3+41·0,2+44·0,4 = 42,4.

2) Дисперсией D(X) дискретной случайной величины X называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от её математического ожидания, т.е.

$$D(X) = M\left[X - M(X)\right]^2 = \sum_{i=1}^{n} \left[x_i - M(X)\right]^2 \cdot p_i \text{.}$$

Эта величина характеризует среднее ожидаемое значение квадрата отклонения X от M(X). Из последней формулы имеем:

$$D(X) = (40-42{,}4)^2 \cdot 0{,}1 + (42-42{,}4)^2 \cdot 0{,}3 + (41-42{,}4)^2 \cdot 0{,}2 + (44-42{,}4)^2 \cdot 0{,}4 =$$

$$= 2{,}4^2 \cdot 0{,}1 + 0{,}4^2 \cdot 0{,}3 + 1{,}4^2 \cdot 0{,}2 + 1{,}6^2 \cdot 0{,}4 = 2{,}04\text{.}$$

Дисперсию D(X) можно найти другим способом, исходя из следующего её свойства: дисперсия D(X) равна разности между математическим ожиданием квадрата случайной величины X и квадратом математического ожидания M(X), то есть

$$D(X)=M(X^2)-\left[M(X)\right]^2.$$

Для вычисления $M(X^2)$ оставим следующий закон распределения величины X$^2$:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| X$^2$ | $40^2$ | $42^2$ | $41^2$ | $44^2$ |
| P | 0,1 | 0,3 | 0,2 | 0,4. |

Тогда

$$M\left(X^2\right)=40^2\cdot 0{,}1+42^2\cdot 0{,}3+41^2\cdot 0{,}2+44^2\cdot 0{,}4=$$
$$=160+529{,}2+336{,}2+774{,}4=1799{,}8$$

и дисперсия $D(X)==1799{,}8-42{,}4^2=2{,}04$.

3) Для характеристики рассеяния возможных значений случайной величины вокруг её среднего значения вводится среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$ случайной величины X, равное квадратному корню из дисперсии D(X), то есть $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$.

Исходя из этой формулы имеем:

$$\sigma=\sqrt{2{,}04}\cong 1.43.$$

**Задача 30.** Непрерывная случайная величина X задана интегральной функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases} 0 \;\; при \;\; x<0 \\ x^3 \;\; при \;\; 0\le x\le 1. \\ 1 \;\; при \;\; x>1 \end{cases}$$

Найти: 1) дифференциальную функцию распределения *f(x)*; 2) математическое ожидание M(X); 3) дисперсию D(X).

Решение.

1) Дифференциальной функцией распределения *f(x)* непрерывной случайной величины X называется производная от интегральной функции распределения F(x), то есть

$$f(x) = F'(x).$$

Искомая дифференциальная функция распределения *f(x)* имеет следующий вид

$$f(x) = \begin{cases} 0 \ \ при \ \ x < 0 \\ 3x^2 \ \ при \ \ 0 \le x \le 1. \\ 0 \ \ при \ \ x > 1 \end{cases}$$

2) Если непрерывная случайная величина X задана функцией *f(x),* то её математическое ожидание определяется формулой

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) \cdot dx.$$

Так как функция *f(x)* при x<0 и при x>1 равна нулю, то из последней формулы имеем

$$M(X) = \int_0^1 x \cdot f(x) \cdot dx = \int_0^1 x \cdot 3x^2 \cdot dx = \left.\frac{3x^4}{4}\right|_0^1 = \frac{3}{4}.$$

3) Дисперсию D(X), для непрерывной случайной величины, определяем по формуле

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - M(X)]^2 \cdot f(x)dx.$$

Тогда

$$D(X) = \int_0^1 \left(x - \frac{3}{4}\right)^2 \cdot 3x^2 dx = 3 \cdot \int_0^1 \left(x^4 - \frac{3}{2}x^3 + \frac{9}{16}x^2\right)dx =$$

$$= 3 \cdot \left(\frac{x^5}{5} - \frac{3x^4}{8} + \frac{3x^3}{16}\right)_0^1 = 3 \cdot \left(\frac{1}{5} - \frac{3}{8} + \frac{3}{16}\right) = \frac{3}{80}.$$

**Задача 31.** Длина детали представляет собой нормально распределенную случайную величину с математическим ожиданием 40 мм и средним квадратическим отклонением 3 мм.

Найти: 1) вероятность того, что длина произвольно взятой детали будет больше 34 мм и меньше 43 мм; 2) вероятность того, что длина детали отклонится от её математического ожидания не более чем на 1,5 мм.

Решение.

1) Пусть X – длина детали. Если случайная величина X задана дифференциальной функцией $f(x)$, то вероятность того, что X примет значения, принадлежащие отрезку $[\alpha, \beta]$, определяются по формуле

$$P(\alpha \le X \le \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx.$$

Вероятность выполнения строгих неравенств $\alpha < X < \beta$ определяются той же формулой. Если случайная величина X распределена по нормальному закону, то

$$P(\alpha \le X \le \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right),$$

где $\Phi(x)$ – функция Лапласа, $a=M(X)$, $\sigma = \sqrt{D(x)}$.

В задании $a = 40$, $\alpha = 34$, $\beta = 43$, $\sigma = 3$. Тогда

$$P(34 < X < 43) = \Phi\left(\frac{43-40}{3}\right) - \Phi\left(\frac{34-40}{3}\right) = \Phi(1) - \Phi(-2) =$$

$$= \Phi(1) + \Phi(2) = 0{,}3413 + 0{,}4772 = 0{,}8185.$$

2) По условию задачи $a - \delta < X < a + \delta$, где $a = 40$; $\delta = 1{,}5$. Подставив в (1) $\alpha = a - \delta$, $\beta = a + \delta$, имеем

$$P(a - \delta < X < a + \delta) = \Phi\left(\frac{a + \delta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - \delta - a}{\sigma}\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{\delta}{\sigma}\right) = 2 \cdot \Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right), \text{ то есть}$$

$$P(|x - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) \qquad (2)$$

Их формулы (2) имеем:

$$P(|x - 40| < 1{,}5) = 2 \cdot \Phi\left(\frac{1{,}5}{3}\right) = 2 \cdot \Phi(0{,}5) = 2 \cdot 0{,}1915 = 0{,}3830.$$

## Образцы выполнения индивидуальных заданий по математической статистике

**Задание 1.** *Получены следующие выборочные данные об урожайности яровой пшеницы (ц/га):*

13,9; 12,4; 13,1; 6,3; 11,8; 11,6; 10,5; 10,4; 10,6; 11,3; 15,1; 11,7; 11,3; 10,2; 11,0; 10,7; 8,2; 10,2; 15,1; 9,6; 14,0; 12,5; 13,2; 6,4; 11,9; 11,7; 10,6; 10,5; 10,5; 10,7; 11,2; 15,0; 11,6; 11,2; 10,1; 10,9; 10,6; 8,4; 9,5; 10,1; 15,0; 11,6; 10,5; 10,4; 10,6; 11,3; 15,1; 11,7; 11,3; 10,2.

*Составить сначала интервальное статистическое распределение выборки, а затем преобразовать его в дискретное, выбрав середины интервалов за новые варианты. Построить гистограмму частот и полигон частот. Определить числовые характеристики выборки: выборочную среднюю; выборочную дисперсию; выборочное среднее квадратическое отклонение; выборочный коэффициент вариации. Причём сделать это двумя способами: а) непосредственно по выборочным данным; б) методом произведений с переходом к условным вариантам.*

Решение.

Сначала определим минимальную и максимальную варианты:

$$x_{\min} = 6{,}3; \qquad x_{\max} = 15{,}1.$$

Таким образом, размах вариации

$$\Delta = x_{\max} - x_{\min} = 15{,}1 - 6{,}3 = 8{,}8.$$

При этом количество вариант (объём выборки) $n=50$.

А теперь разобьём промежуток вариации $[x_{\min};\ x_{\max}]$ на несколько ($m$) промежутков одинаковой ширины $h$ так, чтобы варианты $x_{\min}$ и $x_{\max}$ находились в серединах крайних интервалов:

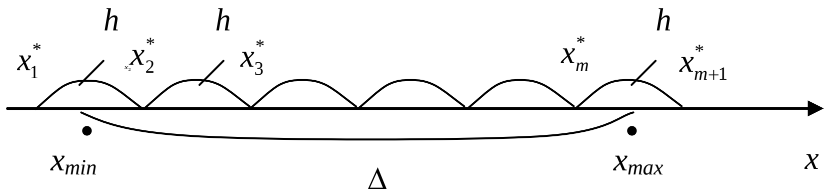


Рис. 1

При этом для выбора оптимального (не слишком большого и не слишком малого) шага разбиения $h$ применим формулу Стэрджеса:

$$h \approx \frac{\Delta}{1+3{,}322\cdot\lg n}$$

В нашем случае эта формула даёт:

$$h \approx \frac{8{,}8}{1+3{,}322\cdot\lg 50} = \frac{8{,}8}{1+3{,}322\cdot 1{,}699} = \frac{8{,}8}{6{,}644} \approx 1{,}32$$

Теперь, в соответствии с рис.1, добавляя к размаху вариации $\Delta$ один шаг $h$, находим (округляя до целого) оптимальное количество $m$ интервалов, на которые мы разобьём интервал вариации $[x_{\min}; x_{\max}]$:

$$m = \frac{\Delta+h}{h} = \frac{8{,}8+1{,}32}{1{,}32} = 7{,}66... \approx 8$$

А теперь, исходя из выбранного значения $m$=8 для количества интервалов, получим окончательное значение длины $h$ одного интервала:

$$m = \frac{\Delta+h}{h} \Rightarrow 8 = \frac{\Delta+h}{h} \Rightarrow 8h = \Delta+h \Rightarrow 7h = \Delta \Rightarrow h = \frac{\Delta}{7} = \frac{8{,}8}{7} = 1{,}257... \approx 1{,}26$$

(окончательное значение $h$ берём с одним дополнительным десятичным знаком по сравнению с исходными вариантами; так как они даны до десятых, то $h$ округляем до сотых).

Итак, для рис.1 мы определили количество интервалов $m$=8 и длину каждого интервала (шаг разбиения) $h$=1,26. Теперь можем определить и границы интервалов:

$$\left(x_1^*;\ x_2^*\right) = \left(x_{\min} - \frac{h}{2};\quad x_{\min} + \frac{h}{2}\right) = \left(6{,}3 - \frac{1{,}26}{2};\quad 6{,}3 + \frac{1{,}26}{2}\right) = (5{,}67;\quad 6{,}93)$$

$$\left(x_2^*;\ x_3^*\right) = \left(x_2^*;\ x_2^* + h\right) = (6{,}93;\quad 6{,}93+1{,}26) = (6{,}93;\quad 8{,}19)$$

$$\left(x_3^*;\ x_4^*\right)=\left(8{,}19;\quad 9{,}45\right);\ \left(x_4^*;\ x_5^*\right)=\left(9{,}45;\quad 10{,}71\right);\ \left(x_5^*;\ x_6^*\right)=\left(10{,}71;\quad 11{,}97\right)$$

$$\left(x_6^*;\ x_7^*\right)=\left(11{,}97;\quad 13{,}23\right);\ \left(x_7^*;\ x_8^*\right)=\left(13{,}23;\quad 14{,}49\right);\ \left(x_8^*;\ x_9^*\right)=\left(14{,}49;\quad 15{,}75\right)$$

Контроль. Согласно рис.1, середины первого и последнего интервалов должны совпадать с $x_{\min}$ и $x_{\max}$ соответственно. Проверим, так ли это:

$$\frac{x_1^*+x_2^*}{2}=\frac{5{,}67+6{,}93}{2}=6{,}3 \text{ - верно (т.к. } x_{\min}=6{,}3)$$

$$\frac{x_m^*+x_{m+1}^*}{2}=\frac{x_8^*+x_9^*}{2}=\frac{14{,}49+15{,}75}{2}=15{,}12 \text{ - верно (т.к. } x_{\max}=15{,}1)$$

Отметим, что несовпадение 15,12 и 15,1, произошедшее из-за округления до сотых шага *h*, несущественно, ибо в самих исходных вариантах сотые отсутствуют.

Теперь в каждом из полученных (восьми) интервалов проведём подсчёт частот. То есть проведём подсчёт количества вариант, попадающих в каждый из интервалов. Для этого заполним таблицу 1. При подсчёте частот (предпоследний столбец таблицы) просматриваем последовательно все 50 вариант и каждую из них отмечаем чёрточкой в соответствующей строке таблицы, строя из этих чёрточек «домики» по 5 чёрточек в домике, чтобы затем количество этих чёрточек удобно было просуммировать:

Таблица 1

| № | Интервалы | Середины интервалов (новые варианты) | Подсчёт частот | Частоты |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 5,67 - 6,93 | 6,30 | ∟ | 2 |
| 2 | 6,93 - 8,19 | 7,56 | | 0 |
| 3 | 9,19 - 9,45 | 8,82 | ∟ | 2 |
| 4 | 9,45 - 10,71 | 10,08 | ⧄ ⧄ ⧄ □ | 19 |
| 5 | 10,71 - 11,97 | 11,34 | ⧄ ⧄ ⧄ \| | 16 |
| 6 | 11,97 - 13,23 | 12,60 | □ | 4 |
| 7 | 13,23 - 14,49 | 13,86 | ∟ | 2 |
| 8 | 14,49 - 15,75 | 15,12 | ⧄ | 5 |
| $\sum$ | | | n=50 | n=50 |

По данным этой таблицы строим гистограмму частот и полигон частот:

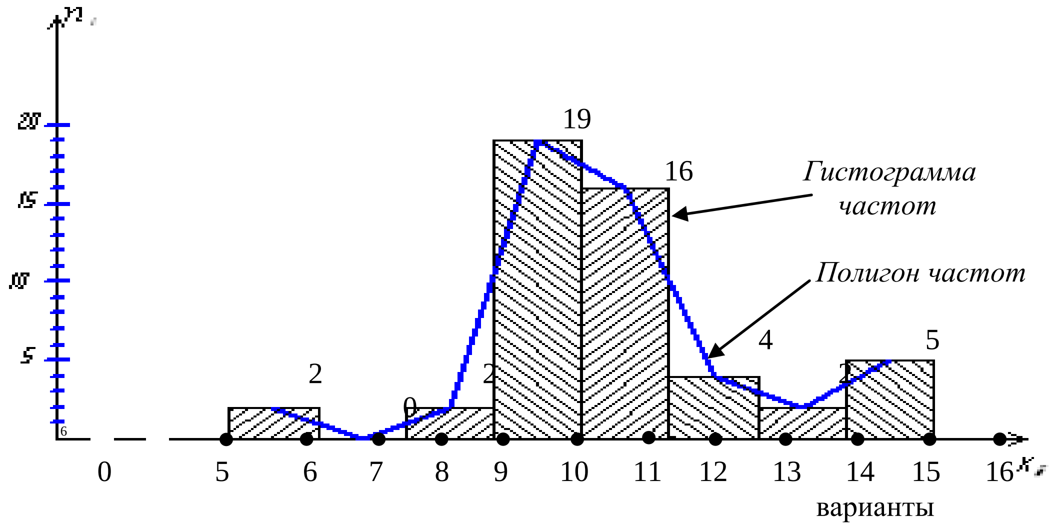


Рис. 2.

А теперь перейдём к подсчёту числовых характеристик выборки – выборочной средней $\bar{x}_в$; выборочной дисперсии $D_в$; выборочного среднего квадратического отклонения $\sigma_в$; выборочного коэффициента вариации $V_в\%$. При этом будем исходить из усреднённого дискретного статистического распределения выборки, полученного в таблице 1:

| $x_i$ (*ц/га*) | 6,30 | 7,56 | 8,82 | 10,08 | 11,34 | 12,60 | 13,86 | 15,12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 2 | 0 | 2 | 19 | 16 | 4 | 2 | 5 |

(*)

Тогда получаем:

$$\bar{x}_в = \frac{\sum x_i \cdot n_i}{n} = \frac{6{,}30\cdot 2 + 7{,}56\cdot 0 + 8{,}82\cdot 2 + \ldots + 15{,}12\cdot 5}{50} = 11{,}1384 \approx 11{,}14 (ц/га)$$

$$D_в = \frac{\sum (x_i - \bar{x}_в)^2 n_i}{n} = \frac{(6{,}30-11{,}14)^2\cdot 2 + (7{,}56-11{,}14)^2\cdot 0 + \ldots + (15{,}12-11{,}14)^2\cdot 5}{50} =$$

$$= 3{,}6425\ldots \approx 3{,}64 (ц/га)^2$$

$$\sigma_в = \sqrt{D_в} = \sqrt{3{,}64} \approx 1{,}91 (ц/га)$$

$$V_в\% = \frac{\sigma_в}{\bar{x}_в} \cdot 100\% = \frac{1{,}91}{11{,}14} \cdot 100\% \approx 17{,}1\%$$

Эти результаты мы получили, используя основные формулы для подсчёта $\bar{x}_в$, $D_в$, $\sigma_в$, $V_в\%$. А теперь получим их методом произведений с переходом к условным вариантам.

Сначала выведем формулы метода произведений. Пусть

| $x_i$ | $x_1$ | $x_2$ | … | $x_m$ |
|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | $n_1$ | $n_2$ | … | $n_m$ |

$\left(\sum n_i = n_1 + n_2 + \ldots + n_m = n\right)$

- статистическое распределение выборки объёма $n$ с равностоящими вариантами $x_i$, где $h = x_{i+1} - x_i$ - расстояние между соседними вариантами (шаг). Перейдём от этих реальных вариант $x_i$ к так называемым условным вариантам

$$u_i = \frac{x_i - C}{h} \quad (i = 1,\ 2, \ldots, m),$$

где $C$ – некоторое заданное число (так называемый ложный нуль). В качестве ложного нуля $C$ выгодно взять одну из вариант $x_i$ - ту, у которой наибольшая частота. Тогда условные варианты $u_i$ станут последовательно расположены целыми числами, причём варианте $x_i = C$ будет соответствовать нулевая условная варианта $u_i$=0 (этим и оправдывается термин «ложный нуль»). С такими вариантами $u_i$ иметь дело гораздо удобнее, чем с реальными вариантами $x_i$.

Выражая $x_i$ через $u_i$, получаем:

$$x_i = hu_i + C \quad (i = 1,2,\ldots,m).$$

А теперь подсчитаем числовые характеристики выборки $(\bar{x}_в; D_в; \sigma_в; V_в\%)$:

$$\bar{x}_в = \frac{\sum x_i n_i}{n} = \frac{\sum (hu_i + C) n_i}{n} = \frac{\sum hu_i n_i + \sum Cn_i}{n} = \frac{h\sum u_i n_i + C\sum n_i}{n} = h \cdot \frac{\sum u_i n_i}{n} + C \cdot \frac{\sum n_i}{n}.$$

Введём обозначение:

$$M_1 = \frac{\sum u_i n_i}{n}$$

($M_1$ – так называемый первый условный момент) и учтём, что $\sum n_i = n$, где $n$ – объём выборки. Тогда получим следующее выражение для выборочной средней $\bar{x}_в$:

$$\bar{x}_в = hM_1 + C.$$

Теперь найдём выборочную дисперсию $D_в$:

$$D_в = \frac{\sum(x_i - \bar{x}_в)^2 n_i}{n} = \frac{\sum\left[(hu_i + C) - (hM_1 + C)\right]^2 \cdot n_i}{n} = \frac{\sum h^2(u_i - M_1)^2 \cdot n_i}{n} =$$

$$= \frac{h^2\left(\sum u_i^2 n_i - 2M_1 \sum u_i n_i + M_1^2 \sum n_i\right)}{n} = h^2 \cdot \left(\frac{\sum u_i^2 n_i}{n} - 2M_1 \frac{\sum u_i n_i}{n} + M_1^2 \frac{\sum n_i}{n}\right)$$

Введём обозначение:

$$M_2 = \frac{\sum u_i^2 n_i}{n}$$

($M_2$ – так называемый второй условный момент) и учтём, что

$$\frac{\sum u_i n_i}{n} = M_1; \qquad \frac{\sum n_i}{n} = \frac{n}{n} = 1.$$

Тогда получим следующую формулу для выборочной дисперсии $D_в$:

$$D_в = h^2\left(M_2 - M_1^2\right)$$

Таким образом, вычислив условные моменты $M_1$ и $M_2$, можем по полученным выше формулам найти $\bar{x}_в$ и $D_в$, а затем и две другие числовые характеристики выборки - $\sigma_в$ и $V_в\%$.

Применим изложенное выше к нашему статистическому распределению (*). Перейдём от реальных вариант $x_i$ к условным вариантам $u_i$ ($i$=1,2,…8) по формуле

$$u_i = \frac{x_i - C}{h} = \frac{x_i - 10{,}08}{1{,}26}, \qquad (i=1,2,\ldots 8)$$

(в качестве ложного нуля $C$ взята варианта $x_i$=10,08, имеющая наибольшую частоту $n_i = 19$). Теперь подсчитаем условные моменты $M_1$ и $M_2$. Для этого составим расчётную таблицу метода произведений (таблицу 2):

Таблица 2

| $x_i$ | $n_i$ | $u_i$ | $n_i\, u_i$ | $n_i\, u_i^2$ | $n_i(u_i+1)^2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 6,30 | 2 | -3 | -6 | 18 | 8 |
| 7,56 | 0 | -2 | 0 | 0 | 0 |
| 8,82 | 2 | -1 | -2 | 2 | 0 |
| 10,08 | 19 | 0 | 0 | 0 | 19 |
| 11,34 | 16 | 1 | 16 | 16 | 64 |
| 12,60 | 4 | 2 | 8 | 16 | 36 |
| 13,86 | 2 | 3 | 6 | 18 | 32 |
| 15,12 | 5 | 4 | 20 | 80 | 125 |
| | $n$=50 | | $\sum n_i u_i = 42$ | $\sum n_i u_i^2 = 150$ | $\sum n_i(u_i+1)^2 = 284$ |

<u>Контроль:</u> $\sum n_i(u_i+1)^2 = \sum n_i u_i^2 + 2\sum n_i u_i + n$ - должно быть

$284 = 150 + 2\cdot 42 + 50$;  284=284 – всё верно.

Далее:

$$M_1 = \frac{\sum n_i u_i}{n} = \frac{42}{50} = 0{,}84; \quad M_2 = \frac{\sum n_i u_i^2}{n} = \frac{150}{50} = 3$$

$$\bar{x}_в = M_1 \cdot h + C = 0{,}84 \cdot 1{,}26 + 10{,}08 \approx 11{,}14 (ц/га)$$

$$D_в = \left(M_2 - M_1^2\right) \cdot h^2 = \left(3 - 0{,}84^2\right) \cdot 1{,}26^2 \approx 3{,}64 (ц/га)^2$$

$$\sigma_в = \sqrt{D_в} = \sqrt{3{,}64} \approx 1{,}91 (ц/га)$$

$$V_в\% = \frac{\sigma_в}{\bar{x}_в} \cdot 100\% = \frac{1{,}91}{11{,}14} \cdot 100\% \approx 17{,}1\%$$

Таким образом, методом произведений получены те же значения числовых характеристик выборки ($\bar{x}_в; D_в; \sigma_в; V_в\%$), что и ранее (см. стр. 3).

Задание 1 полностью выполнено.

---

**<u>Задание 2.</u>** *Исходя из данных и результатов задания* 1*, найти:*

*а) Точечные оценки генеральной средней* $\bar{x}_г$ *и генерального среднего квадратического отклонения* $\sigma_г$*;*

*б) Доверительный интервал для оценки генеральной средней* $\bar{x}_г$ *с надёжностью (вероятностью)* 0,95.

<u>Решение.</u>

а) Как известно, наилучшими несмещенными точечными оценками генеральной средней $\bar{x}_г$ и генерального среднего квадратического отклонения $\sigma_г$ являются следующие оценки:

$$\bar{x}_г \approx \bar{x}_в; \quad \sigma_г \approx s_в,$$

где
$$s_в = \sqrt{\frac{n}{n-1} D_в}$$

- исправленное выборочное среднее квадратическое отклонение.

Так как, согласно заданию 1, $n$=50 – объём выборки, $\bar{x}_в = 11{,}14(ц/га)$ - выборочная средняя, $D_в = 3{,}64(ц/га)^2$ - выборочная дисперсия, то получаем:

$$s_в = \sqrt{\frac{50}{49} \cdot 3{,}64} \approx 1{,}93(ц/га); \qquad \bar{x}_г \approx \bar{x}_в \approx 11{,}14(ц/га); \qquad \sigma_г \approx s_в \approx 1{,}93(ц/га).$$

Это и есть точечные оценки $\bar{x}_г$ и $\sigma_г$.

б) Теперь выполним задание (б). Так как объём выборки $n$=50 достаточно велик, то для интервальной оценки $\bar{x}_г$ с заданной надёжностью $\gamma = 0{,}95$, согласно теории, имеем: с надёжностью $\gamma$ генеральная средняя $\bar{x}_г$ содержится в доверительном интервале $(\bar{x}_в - \delta; \quad \bar{x}_в + \delta)$, где точность $\delta$ интервальной оценки $\bar{x}_г$ связана с её надёжностью $\gamma$ соотношением:

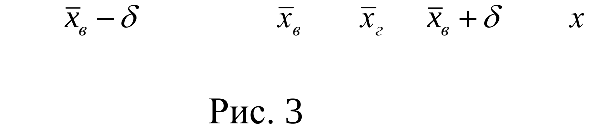


Рис. 3

$$\delta = t_\gamma \cdot \frac{s_в}{\sqrt{n}}$$

Здесь

$$2\Phi(t_\gamma)=\gamma\ ;\quad \Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$ - интеграл вероятностей.

Для нашей задачи получаем:

$$2\Phi(t_\gamma)=0{,}95\Rightarrow\Phi(t_\gamma)=0475\Rightarrow t_\gamma=1{,}96$$ (найдено по таблице функции *Ф(x)*) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow\delta=t_\gamma\frac{s_в}{\sqrt{n}}=1{,}96\cdot\frac{1{,}93}{\sqrt{50}}\approx0{,}53(ц/га)$$

Итак,

$$(\bar{x}_в-\delta;\quad \bar{x}_в+\delta)=(11{,}14-0{,}53;\quad 11{,}14+0{,}53)=(10{,}61;\quad 11{,}67)$$

То есть с надёжностью (вероятностью) $\gamma=0{,}95$ неизвестная генеральная средняя $\bar{x}_г$ (средняя урожайность яровой пшеницы во всей генеральной совокупности) находится в интервале

$$(10{,}61(ц/га);\quad 11{,}67(ц/га))$$

Задание 2 выполнено.

---

**<u>Задание 3</u>**. *Проверить по критерию Пирсона при уровнях значимости а)* $\alpha=0{,}05$ *и б)* $\alpha=0{,}01$ *гипотезу о нормальности распределения исследуемого признака X объектов генеральной совокупности. Сделать геометрическую иллюстрацию результата проверки, изобразив на одном рисунке полигон реальных (экспериментальных) частот и полигон расчётных (теоретических). В качестве исходных данных использовать результаты, содержащиеся в заданиях* 1 *и* 2.

<u>Решение.</u> В задании 1 исходные выборочные данные сведены к дискретному распределению с равностоящими вариантами с шагом $h=1{,}26$:

| $x_i$ | 6,30 | 7,56 | 8,82 | 10,08 | 11,34 | 12,60 | 13,86 | 15,12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 2 | 0 | 2 | 19 | 16 | 4 | 2 | 5 |

($n$=50)

Здесь $x_i$ - выборочные значения исследуемого признака $X$ (урожайности пшеницы). Наряду с вариантами $x_i$ введём числа

$$z_i = x_i + \frac{h}{2} \ (i=1,\ 2, \ldots m\text{-}1); \qquad z_0 = -\infty; \qquad z_m = +\infty,$$

которые, в соответствии с рис.4,

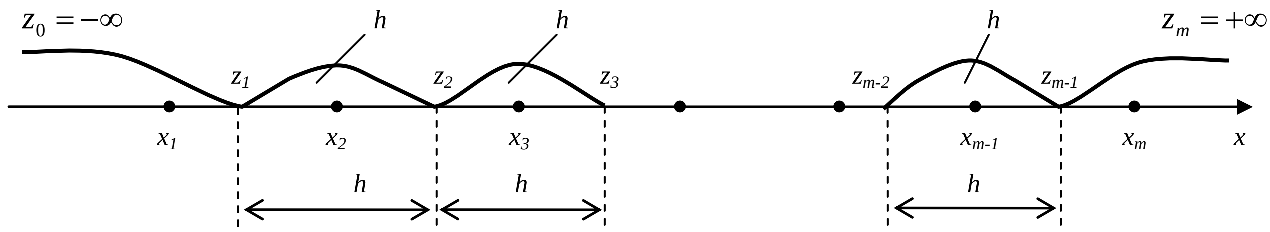


Рис. 4

представляют собой границы интервалов длиной $h$ (кроме крайних полубесконечных интервалов), на которые разбивается числовая ось *ox,* и в серединах которых находятся варианты $x_i$ ($i$=1, 2...$m$). В нашем случае $m$=8 – число вариант $x_i$, а

$$z_i = (-\infty; \quad 6{,}93; \quad 8{,}19; \quad 9{,}45; \quad 10{,}71; \quad 11{,}97; \quad 13{,}23; \quad 14{,}49; \quad +\infty)$$

Теперь выдвинем проверяемую гипотезу $H_0$: исследуемый признак $X$ (урожайность яровой пшеницы) в генеральной совокупности (на всей площади) распределён нормально. В качестве параметров $a$ и $\sigma$ (математического ожидания и среднего квадратического отклонения) этого нормального распределения используем найденные в задании 2 точечные оценки для $\bar{x}_г$ и $\sigma_г$:

$$a = \bar{x}_г \approx 11{,}14(ц/га); \qquad \sigma = \sigma_г \approx 1{,}93(ц/га)$$

Исходя из справедливости гипотезы $H_0$ и из этих параметров, подсчитаем вероятности

$$p_i = \Phi\left(\frac{z_i - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{z_{i-1} - a}{\sigma}\right) \qquad (i=1,\ 2, \ldots 8)$$

попадания значения признака $X$ в интервалы ($z_{i-1}$; $z_i$), а по ним новые (теоретические) частоты $n_i^* = np_i$ ($i$=1,2,…$m$) вариант $x_i$. То есть подсчитаем те частоты $n_i^*$, которые имели бы усреднённые варианты $x_i$, если бы признак $X$ действительно (в соответствии с гипотезой $H_0$) был распределён по нормальному закону. Подсчёт этих теоретических частот оформим в виде таблицы (таблица 3). Подсчитанные теоретические частоты $n_i^*$ округлим до десятых, то есть до одного лишнего десятичного знака:

Таблица 3

| $i$ | $z_{i-1}$ | $z_i$ | $\frac{z_{i-1}-a}{\sigma}$ | $\frac{z_i-a}{\sigma}$ | $\Phi\left(\frac{z_{i-1}-a}{\sigma}\right)$ | $\Phi\left(\frac{z_i-a}{\sigma}\right)$ | $p_i = \Phi\left(\frac{z_i-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{z_{i-1}-a}{\sigma}\right)$ | $n_i^* = np_i = 50 \cdot p_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | $-\infty$ | 6,93 | $-\infty$ | -2,18 | -0,5 | -0,4854 | 0,0146 | 0,7 |
| **2** | 6,93 | 8,19 | -2,18 | -1,53 | -0,4854 | -0,4370 | 0,0484 | 2,4 |
| **3** | 8,19 | 9,45 | -1,53 | -0,88 | -0,4370 | -0,3106 | 0,1264 | 6,3 |
| **4** | 9,45 | 10,71 | -0,88 | -0,22 | -0,3106 | -0,0871 | 0,2235 | 11,2 |
| **5** | 10,71 | 11,97 | -0,22 | 0,43 | -0,0871 | 0,1664 | 0,2535 | 12,7 |
| **6** | 11,97 | 13,23 | 0,43 | 1,08 | 0,1664 | 0,3599 | 0,1935 | 9,7 |
| **7** | 13,23 | 14,49 | 1,08 | 1,74 | 0,3599 | 0,4591 | 0,0992 | 5,0 |
| **8** | 14,49 | $+\infty$ | 1,74 | $+\infty$ | 0,4591 | 0,5 | 0,0409 | 2,0 |
| | | | | | | | $\sum p_i = 1{,}0000$ | $\sum n_i^* = 50{,}0$ |

Теперь сравним реальные (экспериментальные) частоты $n_i$ и теоретические частоты $n_i^*$ для одних и тех же вариант $x_i$ (таблица 4):

Таблица 4

| $x_i$ | 6,30 | 7,56 | 8,82 | 10,08 | 11,34 | 12,60 | 13,86 | 15,12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 2 | 0 | 2 | 19 | 16 | 4 | 2 | 5 |
| $n_i^*$ | 0,7 | 2,4 | 6,3 | 11,2 | 12,7 | 9,7 | 5,0 | 2,0 |

Частоты $n_i$ и $n_i^*$ не совпадают. И теперь нам нужно выяснить, существенно (значимо) различие между ними или оно несущественно (незначимо). Если будет признано, что экспериментальные $n_i$ и теоретические $n_i^*$ частоты различаются между собой несущественно (незначимо), то это будет означать, что эксперимент и теория согласуются между собой, и тогда эту теорию (гипотезу $H_0$) о нормальности распределения исследуемого признака $X$ (урожайности яровой пшеницы) в генеральной совокупности мы примем. А если расхождение частот $n_i$ и $n_i^*$ будет признано существенным (значимым), то мы эту гипотезу $H_0$ отвергнем.

Сравнение частот $n_i$ и $n_i^*$ проведём с помощью критерия Пирсона. Так как применение этого критерия предполагает наличие достаточно больших экспериментальных частот $n_i$ (все они должны быть не менее 5, кроме разве что крайних частот), то объединим частоты первых трёх вариант (как реальных $n_i$, так и теоретических $n_i^*$). А предпоследнюю частоту $n_i = 2$, как и предпоследнюю частоту $n_i^* = 5{,}0$, разделим поровну и присоединим к соседним (справа и слева) частотам. В итоге получим следующую таблицу (таблица 5):

Таблица 5

| $n_i$ | 4 | 19 | 16 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|
| $n_i^*$ | 9,4 | 11,2 | 12,7 | 12,2 | 4,5 |

$\sum n_i = 50{,}0$
$\sum n_i^* = 50{,}0$

Теперь, в соответствии с критерием Пирсона, подсчитаем экспериментальное значение величины $\chi^2$ *(хи-квадрат)*

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{m} \frac{\left(n_i - n_i^*\right)^2}{n_i^*},$$

и сравним его с табличным критическим значением $\chi^2_{кр}(\alpha; k)$, где $\alpha$ - уровень значимости критерия (согласно заданию, у нас в варианте (а) $\alpha = 0{,}05$, а в варианте (б) $\alpha = 0{,}01$), а $k = m - 3 = 5 - 3 = 2$ - число степеней свободы случайной величины $\chi^2$. Здесь $m$ – число столбцов в расчётной таблице 5 ($m$=5). Экспериментальное значение $\chi^2$ таково:

$$\chi^2 = \frac{(4-9{,}4)^2}{9{,}4} + \frac{(19-11{,}2)^2}{11{,}2} + \frac{(16-12{,}7)^2}{12{,}7} + \frac{(5-12{,}2)^2}{12{,}2} + \frac{(6-4{,}5)^2}{4{,}5} \approx 14{,}4$$

А согласно таблице критических точек распределения *хи-квадрат* (таблице 3 Приложения)

$$а)\ \chi^2_{кр}(0{,}05;\,2) = 6{,}0; \qquad б)\ \chi^2_{кр}(0{,}01;\,2) = 9{,}12;$$

Так как и в варианте (а), и в варианте (б) $\chi^2 \succ \chi^2_{кр}$, то в обоих вариантах гипотезу $H_0$ о нормальности распределения исследуемого признака $X$ (урожайности яровой пшеницы) отвергаем.

Примечание. Если бы оказалось, что в одном варианте (при одном уровне значимости) гипотеза $H_0$ отвергается, а при другом принимается, то более обоснованно мы поступим, если проверяемую гипотезу $H_0$ отвергнем (см. конспект лекций, стр. 117).

В заключении приведём геометрическую иллюстрацию полученных выводов. При этом используем не последнюю (деформированную под потребности критерия Пирсона) таблицу 5, а предпоследнюю таблицу 4 (недеформированную):

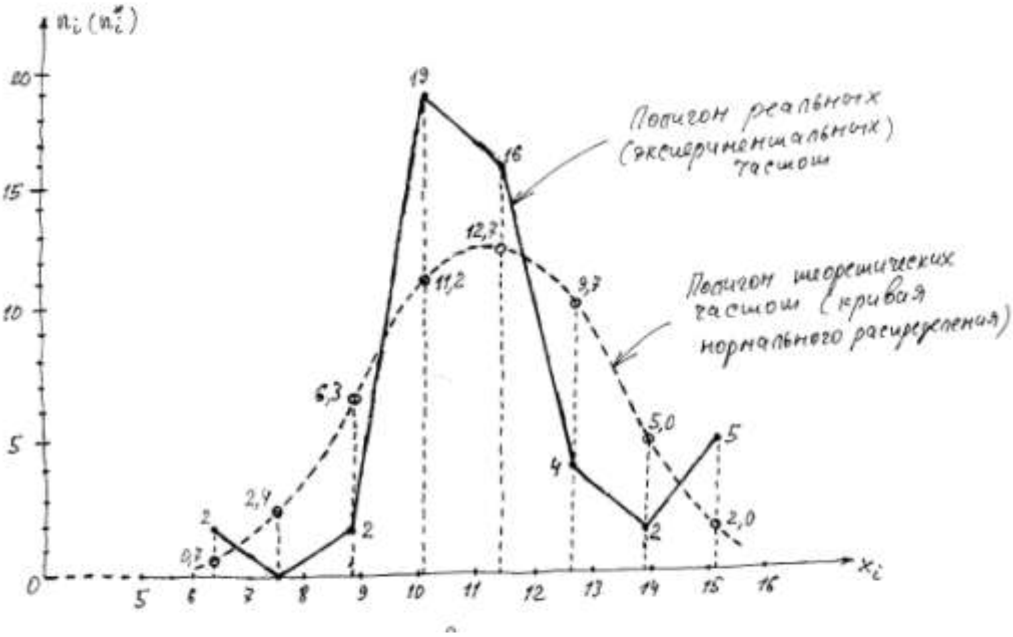


Рис. 5.

Рисунок 5 наглядно подтверждает, что действительно имеется большое различие между полигоном реальных частот и кривой нормального распределения.

Задание 3 выполнено.

**<u>Задание 4.</u>** *Из выборки, данной в задании* 1, *выделить две частные выборки (подвыборки). В первую из них включить первые* 10 *вариант, во вторую последние* 12. *С помощью критерия Вилкоксона при уровне значимости* $\alpha = 0{,}05$ *проверить гипотезу* $H_0$ *о том, что обе указанные выборки сделаны из одной генеральной совокупности.*

<u>Решение.</u> Выпишем обе указанные частичные выборки:

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 13,9 | 12,4 | 13,1 | 6,3 | 11,8 | 11,6 | 10,5 | 10,4 | 10,6 | 11,3 | | |
| $y_i$ | 9,5 | 10,1 | 15,0 | 11,6 | 10,5 | 10,4 | 10,6 | 11,3 | 15,1 | 11,7 | 11,3 | 10,2 |

Перепишем каждую из них в порядке возрастания вариант:

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 6,3 | 10,4 | 10,5 | 10,6 | 11,3 | 11,6 | 11,8 | 12,4 | 13,1 | 13,9 | | |
| $y_i$ | 9,5 | 10,1 | 10,2 | 10,4 | 10,5 | 10,6 | 11,3 | 11,3 | 11,6 | 11,7 | 15,0 | 15,1 |

А теперь образуем из этих двух выборок одну общую выборку, варианты $z_i$ которой тоже расположим в порядке их возрастания, и укажем порядковый номер $n_i$ каждой из этих вариант. Чтобы в этой общей выборке отличать варианты $x_i$ от вариант $y_i$, варианты $x_i$ (их меньше) обведём кружками (таблица 6):

Таблица 6

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| $z_i$ | 6,3 | 9,5 | 10,1 | 10,2 | 10,4 | 10,4 | 10,5 | 10,5 | 10,6 | 10,6 | 11,3 |
| $n_i$ | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 |
| $z_i$ | 11,3 | 11,3 | 11,6 | 11,6 | 11,7 | 11,8 | 12,4 | 13,1 | 13,9 | 15,0 | 15,1 |

Теперь найдём значение критерия Вилкоксона – сумму $W$ порядковых номеров вариант $x_i$ первой (меньшей) выборки. Так как некоторые из этих вариант совпадают с вариантами $y_i$ (речь идёт о вариантах 10,4; 10,5; 10,6; 11,3; 11,6), то номерами таких вариант $x_i$ считаются средние арифметические из номеров соответствующих одинаковых вариант. Таким образом,

$$W = 1 + \frac{5+6}{2} + \frac{7+8}{2} + \frac{9+10}{2} + \frac{11+12+13}{3} + \frac{14+15}{2} + 17 + 18 + 19 + 20 = 124$$

Согласно теории критерия Вилкоксона, проверяемая гипотеза $H_0$ об однородности обеих выборок $x_i$ и $y_i$, т.е. о том, что они сделаны из одной генеральной совокупности, должна быть отвергнута, если значение суммы $W$ окажется слишком малым или, наоборот, слишком большим. То есть если окажется, что $W \prec W_{нижн.кр.}$ или $W \succ W_{верхн.кр.}$. При этом

$$W_{нижн.кр.} = W_{нижн.кр.}\ (Q;\ n_1;\ n_2),$$

причём $Q = \frac{\alpha}{2} = \frac{0{,}05}{2} = 0{,}025$; $n_1 = 10$ - объём меньшей выборки; $n_2 = 12$ - объём большей выборки. Таким образом,

$$W_{нижн.кр.} = W_{нижн.кр.}(0{,}025;\ 10;\ 12) = 84$$

(это значение найдено по таблице критических точек критерия Вилкоксона), а

$$W_{верхн.кр.} = (n_1 + n_2 + 1)\cdot n_1 - W_{\text{нижн.кр}} = (10+12+1)\cdot 10 - 84 = 146.$$

И так как оказалось, что

$$W_{нижн.кр.} \prec W \prec W_{верхн.кр.} \qquad (84 \prec 124 \prec 146),$$

то у нас нет оснований отвергать нулевую гипотезу $H_0$ о том, что обе выборки $x_i$ и $y_i$ сделаны из одной генеральной совокупности. И этот вывод правильный, так как обе указанные выборки действительно сделаны из одной генеральной совокупности.

Задание 4 выполнено.

**<u>Задание 5.</u>** *Оценить значимость влияния сорта на урожайность пшеницы*:

Таблица 7

| Сорт | Урожайность, ц/га | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 |
| Новоукраинка 84 | 35,2 | 35,2 | 32,2 | 33,8 |
| Безостая 4 | 45,7 | 44,2 | 43,7 | 44,0 |
| Скороспелка 3 | 42,5 | 54,5 | 35,7 | 53,7 |

<u>Решение.</u> Будем рассматривать сорт пшеницы как фактор $A$, чьё влияние на исследуемую величину $X$ (урожайность пшеницы) требуется оценить. Требуется оценить, существенно (значимо) или несущественно (незначимо) влияет сорт пшеницы на её урожайность.

Выдвинем основную (нулевую) гипотезу $H_0$: сорт несущественно (незначимо) влияет на урожайность при альтернативной гипотезе $H_1$, что сорт влияет на урожайность существенно (значимо). Будем проверять гипотезу $H_0$ при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$.

Сорт пшеницы представляет собой качественный фактор $A$ при трёх уровнях этого фактора: Новоукраинка 84, Безостая 4, Скороспелка 3. Так как проверка значимости (незначимости) влияния качественного фактора на изучаемую величину – это задача дисперсионного анализа, то попробуем применить этот анализ.

Приведём исходную таблицу 7 к стандартному для дисперсионного анализа виду (таблица 8):

Таблица 8

| Номер измерения | Уровни фактора $A$ (сорта пшеницы) | | |
|---|---|---|---|
| | $a_1$ (Новоукраинка 84) | $a_2$ (Безостая 4) | $a_3$ (Скороспелка 3) |
| 1 | 35,2 | 45,7 | 42,5 |
| 2 | 35,2 | 44,2 | 54,5 |
| 3 | 32,2 | 43,7 | 35,7 |
| 4 | 33,8 | 44,0 | 53,7 |
| Групповые средние | 34,1 | 44,4 | 46,6 |

Как известно, дисперсионный анализ может быть применён, если выполнены два условия:

1) На каждом из уровней фактора $A$ исследуемая величина $X$ распределена нормально.
2) Дисперсии исследуемой величины $X$ на каждом из уровней фактора $A$ (внутригрупповые дисперсии) различаются между собой незначимо.

Первое из этих условий будем считать выполненным, ибо разброс урожайности каждого конкретного сорта пшеницы связан со множеством случайных факторов (помех), что делает урожайность каждого сорта случайной величиной, распределение которой близко к нормальному (см. конспект, часть 1, глава 2, пункт 4.2). К сожалению, провести проверку истинности этого умозаключения по критерию Пирсона (часть 2, § 3, пункт 3.6) мы не можем – для этого у нас слишком мало измерений (всего 4, а требуется минимум 50).

Проверим второе условие. Для этого для каждого из трёх столбцов таблицы 8 (для каждого сорта пшеницы) найдём исправленную выборочную дисперсию:

$$s_1^2 = \frac{\sum_{j=1}^{4}\left(x_{1j} - \bar{x}_1\right)^2}{n-1} = \frac{(35{,}2-34{,}1)^2 + (35{,}2-34{,}1)^2 + (32{,}2-34{,}1)^2 + (33{,}8-34{,}1)^2}{4-1} \approx 2{,}04$$

$$s_2^2 = \frac{\sum_{j=1}^{4}\left(x_{2j} - \bar{x}_2\right)^2}{n-1} = \frac{(45{,}7-44{,}4)^2 + (44{,}2-44{,}4)^2 + (43{,}7-44{,}4)^2 + (44{,}0-44{,}4)^2}{4-1} \approx 0{,}793$$

$$s_3^2 = \frac{\sum_{j=1}^{4}\left(x_{3j} - \bar{x}_3\right)^2}{n-1} = \frac{(42{,}5-46{,}6)^2 + (54{,}5-46{,}6)^2 + (35{,}7-46{,}6)^2 + (53{,}7-46{,}6)^2}{4-1} \approx 82{,}81$$

Как видим, дисперсия $s_3^2$ резко отличается от $s_1^2$ и от $s_2^2$. Это указывает на то, что, скорее всего, внутригрупповые дисперсии ($s_1^2; s_2^2; s_3^2$) нельзя считать различающимися незначимо. Они, видимо, различаются существенно (значимо). То есть, скорее всего, второе условие применимости дисперсионного анализа нарушено, что делает неправомочным применение этого анализа в нашей задаче.

Впрочем, убедимся в этом, ибо такое различие могло оказаться и случайным. Для этого достаточно убедиться в том, что наименьшая выборочная дисперсия $s_2^2 = 0{,}793$ и набольшая выборочная дисперсия $s_3^2 = 82{,}81$ различаются между собой существенно (значимо). Тогда и все три дисперсии ($s_1^2; s_2^2; s_3^2$) различаются значимо. А если $s_2^2$ и $s_3^2$ различаются незначимо, то и все три дисперсии ($s_1^2; s_2^2; s_3^2$) различаются незначимо.

Для сравнения выборочных дисперсий $s_2^2$ и $s_3^2$ применим критерий Фишера-Снедекора (см. конспект лекций, часть 2, §3, пункт 3.3). Для этого сначала найдём экспериментальное значение этого критерия:

$$f_{эксп.} = \frac{s_3^2}{s_2^2} = \frac{82{,}81}{0{,}793} \approx 104{,}4\,.$$

Затем с помощью Приложения (таблица 5) найдём критическое значение критерия при заданном уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ и степенях свободы критерия $k_1 = n_1 - 1 = 4 - 1 = 3$ и $k_2 = n_2 - 1 = 4 - 1 = 3$:

$$f_{кр} = f_{кр}(\alpha; k_1; k_2) = f_{кр}(0{,}05; 3; 3) = 9{,}28$$

И так как оказалось, что $f_{эксп} \succ f_{кр}$, то различие $s_3^2$ и $s_2^2$ признаем существенным (значимым).

Итак, наше подозрение о значимости различия дисперсий ($s_1^2; s_2^2; s_3^2$) подтвердилось, и потому мы не вправе применять дисперсионный анализ к проверке гипотезы $H_0$ о несущественности (незначимости) влияния сорта пшеницы на её урожайность.

Кстати, если сравнить между собой дисперсии ($s_1^2; s_3^2$) и ($s_1^2; s_2^2$) аналогично тому, как сравнивались дисперсии $s_2^2$ и $s_3^2$, то получим:

$$f_{эксп.} = \frac{s_3^2}{s_1^2} = \frac{82{,}81}{2{,}04} = 40{,}6 \succ f_{кр} = 9{,}28$$

$$f_{эксп.} = \frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{2{,}04}{0{,}793} = 2{,}57 \prec f_{кр} = 9{,}28$$

То есть дисперсии $s_1^2$ и $s_3^2$ различаются между собой значимо, а дисперсии $s_1^2$ и $s_2^2$ - незначимо.

Вернёмся к гипотезе $H_0$ о несущественности (незначимости) влияния фактора *A* (сорта пшеницы) на исследуемую величину *X* (на урожайность пшеницы). Так как подтвердить (или отклонить) её методом дисперсионного анализа нам не удаётся, то пойдём другим путём. А именно, сравним урожайности пшеницы для разных её сортов попарно. Для этого применим схему, изложенную в конспекте лекций (часть 2, § 3, пункт 3.5).

1) Сравним урожайности пшеницы на уровнях $a_1$ и $a_2$ фактора *A* (см. таблицу 8). То есть сравним урожайности сортов «Новоукраинка 84» и «Безостая 4». В качестве нулевой примем следующую гипотезу $H_0$: урожайности этих двух сортов различаются между собой незначимо при альтернативной гипотезе $H_1$, что урожайность сорта $a_2$ (Безостая 4) выше урожайности сорта $a_1$ (Новоукраинка 84). Выдвинутую гипотезу $H_0$ будем проверять при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$.

Найдём среднее значение $s^2$ из исправленных выборочных дисперсий $s_1^2 = 2{,}04$ и $s_2^2 = 0{,}793$. Так как $n_1 = 4$ и $n_2 = 4$ - количество повторных измерений урожайности для каждого сорта, то получаем:

$$s^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2} = \frac{3 \cdot 2{,}04 + 3 \cdot 0{,}793}{6} \approx 1{,}4165.$$

Теперь найдём экспериментальное значение случайной величины *T*, имеющей распределение Стьюдента и являющейся критерием проверки гипотезы $H_0$:

$$T = \frac{\bar{x}_2 - \bar{x}_1}{\sqrt{s^2}} \cdot \sqrt{\frac{n_1 \cdot n_2}{n_1 + n_2}} = \frac{44{,}4 - 34{,}1}{\sqrt{1{,}4165}} \cdot \sqrt{\frac{4 \cdot 4}{4 + 4}} \approx 12{,}24$$

Так как выборочные дисперсии $s_1^2$ и $s_2^2$ различаются между собой незначимо, то число *k* степеней свободы величины *T* найдём по формуле:

$$k = n_1 + n_2 - 2 = 4 + 4 - 2 = 6$$

Теперь найдём $t_{кр}$ - критическое значение критерия *T*. Его найдём по таблице 4 Приложения, исходя из равенства:

$$P(-t_{кр} \prec T \prec \mathrm{t_{кр}}) = 1 - 2\alpha$$

(см. конспект лекций, часть 2, формула (3.25)). Так как $1 - 2\alpha = 1 - 2 \cdot 0{,}05 = 0{,}9$ и $k = 6$, то с помощью указанной таблицы получаем:

$$P(-t_{кр} \prec \mathrm{T} \prec t_{кр}) = 0{,}9 = 1 - 0{,}1 \Rightarrow t_{кр} = t_{кр}(0{,}1;\, 6) = 1{,}94$$

Итак, экспериментальное значение $T = 12{,}24$, а $t_{кр} = 1{,}94$. То есть $T \notin (-t_{кр};\ t_{кр})$. А это значит, что выдвинутая гипотеза $H_0$ о незначимости развития урожайностей сортов «Новоукраинка 84» и «Безостая 4» отвергается. То есть принимается альтернативная ей гипотеза $H_1$: урожайность «Безостой 4» выше урожайности «Новоукраинки 84». Иначе говоря, различие средних урожайностей $\bar{x}_1 = 34{,}1$ и $\bar{x}_2 = 44{,}4$ этих двух сортов не случайно и связано с тем, что один из этих сортов урожайнее другого.

Заодно мы получим результат, который не смогли получить с помощью дисперсионного анализа: фактор *A* (сорт пшеницы) существенно (значимо) влияет на урожайность *X* пшеницы.

Однако продолжим попарное сравнение урожайностей пшеницы данных трёх сортов.

2) Сравним урожайности сортов «Новоукраинка 84» (уровень $a_1$ фактора $A$) и «Скороспелка 3» (уровень $a_3$ фактора $A$). Нулевая гипотеза $H_0$: урожайности этих сортов различаются между собой незначимо. Альтернативная гипотеза $H_1$: урожайность «Скороспелки 3» выше урожайности «Новоукраинки 84». Уровень значимости $\alpha = 0{,}05$. Буквально повторяя выкладки, произведённые выше при сравнении сортов «Новоукраинка 84» и «Безостая 4», получим:

$$s^2 = \frac{(n_1 - 1)\cdot s_1^2 + (n_3 - 1)\cdot s_3^2}{n_1 + n_3 - 2} = \frac{3\cdot 2{,}04 + 3\cdot 82{,}81}{6} \approx 42{,}425.$$

$$T = \frac{\bar{x}_3 - \bar{x}_1}{\sqrt{s^2}}\cdot\sqrt{\frac{n_1\cdot n_3}{n_1 + n_3}} = \frac{46{,}6 - 34{,}1}{\sqrt{42{,}425}}\cdot\sqrt{\frac{4\cdot 4}{4+4}} \approx 2{,}498.$$

Так как выборочные дисперсии $s_1^2$ и $s_3^2$, различаются между собой существенно (значимо), то число $k$ степеней свободы величины $T$ найдётся по формуле (3.19) (см. конспект лекций, часть 2):

$$k = (n_1 + n_2 - 2)\cdot\left(0{,}5 + \frac{s_1^2\cdot s_3^2}{s_1^4 + s_3^4}\right) = (4+4-2)\cdot\left(0{,}5 + \frac{2{,}04\cdot 82{,}81}{(2{,}04)^2 + (82{,}81)^2}\right) \approx 3{,}15$$

Теперь найдем критическое значение $t_{кр}$ критерия $T$:

$$t_{кр} = t_{кр}(0{,}1;\ 3{,}15) \approx 2{,}32$$

И так как $T \notin (-t_{кр};\ t_{кр})$, то признаем существенным (значимым) различие урожайностей сортов «Новоукраинка 84» и «Скороспелка 3). То есть принимаем альтернативную гипотезу $H_1$: урожайность «Скороспелки 3» выше урожайности «Новоукраинки 84».

3) наконец сравним урожайности последней пары сортов: «Безостая 4» (уровень $a_2$ фактора А) и «Скороспелки 3» (уровень $a_3$ фактора А). Здесь имеем:

$$s^2 = \frac{(n_2 - 1)s_2^2 + (n_3 - 1)s_3^2}{n_2 + n_3 - 2} = \frac{3\cdot 0{,}793 + 3\cdot 82{,}81}{6} \approx 41{,}80;$$

$$T = \frac{\bar{x}_3 - \bar{x}_2}{\sqrt{s^2}} \cdot \sqrt{\frac{n_2 \cdot n_3}{n_2 + n_3}} = \frac{46{,}6 - 44{,}4}{\sqrt{41{,}80}} \cdot \sqrt{\frac{4 \cdot 4}{4 + 4}} \approx 0{,}48$$

Так как $s_2^2$ и $s_3^2$ различаются между собой значимо, то

$$k = (n_2 + n_3 - 2) \cdot \left( 0{,}5 + \frac{s_2^2 \cdot s_3^2}{s_2^4 + s_3^4} \right) = (4 + 4 - 2) \cdot \left( 0{,}5 + \frac{0{,}793 \cdot 82{,}81}{(0{,}793)^2 + (82{,}81)^2} \right) \approx 3{,}06$$

Следовательно,

$$t_{кр} = t_{кр}(0{,}1;\ 3{,}06) \approx 2{,}34$$

Как оказалось, здесь $T \in (-t_{кр};\ t_{кр})$. А значит, у нас нет оснований опровергать гипотезу $H_0$ о несущественности (незначимости) различия урожайностей сортов «Безостая 4» и «Скороспелка 3». Иначе говоря, гипотезу $H_0$ об одинаковости их урожайностей <u>принимаем</u>. Тем самым различие их средних урожайностей $\bar{x}_2 = 44{,}4$ и $\bar{x}_3 = 46{,}6$ считаем случайным, то есть вызванным различными случайными факторами (различие почв, вредители, неравномерность выпадения осадков, и т.д.).

*<u>Примечание.</u>* Если бы различие всех трех исправленных выборочных дисперсий $(s_1^2; s_2^2; s_3^2)$ оказалось несущественным (незначимым), то вместо проведенного выше попарного сравнения урожайностей трех сортов пшеницы было бы гораздо удобнее применить дисперсионный анализ. Образец применения этого анализа приведен в конспекте лекций на стр.142-144.

Задание 5 выполнено.

---

**<u>Задание 6.</u>** *Методом корреляционно-регресионного анализа исследовать корреляционную зависимость между высотой X и диаметром Y деревьев:*

Таблица 9

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| X | 29,8 | 29,8 | 26,8 | 27,7 | 28,2 | 24,8 | 28,6 | 27,2 | 26,6 | 25,9 |
| Y | 37,5 | 36,0 | 33,0 | 40,7 | 36,4 | 28,5 | 31,7 | 29,5 | 26,0 | 28,0 |

*Установить подходящую форму и найти приближенное уравнение регрессии, характеризующее корреляционную зависимость Y от X. Оценить* *степень тесноты указанной корреляционной зависимости, а также качество и адекватность выборочным данным построенного приближенного уравнения регрессии.*

Решение. Будем следовать схеме, изложенной в конспекте лекций (часть 2, §5, пример 1). Сначала оформим исходные данные с упорядоченными по возрастанию вариантами $x_i$ (значениями X) и вариантами $y_j$ (значениями Y):

Таблица 10

| $y_j$ \ $x_i$ | 24,8 | 25,9 | 26,6 | 26,8 | 27,2 | 27,7 | 28,2 | 28,6 | 29,8 | $m_j = \sum_{i=1}^{n} n_{ij}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 26,0 | - | - | 1 | - | - | - | - | - | - | 1 |
| 28,0 | - | 1 | - | - | - | - | - | - | - | 1 |
| 28,5 | 1 | - | - | - | - | - | - | - | - | 1 |
| 29,5 | - | - | - | - | 1 | - | - | - | - | 1 |
| 31,7 | - | - | - | - | - | - | - | 1 | - | 1 |
| 33,0 | - | - | - | 1 | - | - | - | - | - | 1 |
| 36,0 | - | - | - | - | - | - | - | - | 1 | 1 |
| 36,4 | - | - | - | - | - | - | 1 | - | - | 1 |
| 37,5 | - | - | - | - | - | - | - | - | 1 | 1 |
| 40,7 | - | - | - | - | - | 1 | - | - | - | 1 |
| $n_i = \sum_{j=1}^{m} n_{ij}$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | N=10 |
| $\bar{y}_{x_i}$ | 28,5 | 28,0 | 26,0 | 33,0 | 29,5 | 40,7 | 36,4 | 31,7 | 36,75 | |

Теперь изобразим данные этой таблицы в виде точек корреляционного поля (при этом удобнее использовать исходные данные, представленные в таблице 9) – рис.6.

Далее по формуле:

$$\bar{y}_{x_i} = \frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{m} y_j n_{ij}$$

находим для каждого $x_i$ условную среднюю $\bar{y}_{x_i}$:

$\bar{y}_{x_1=24,8}=28,5$; $\bar{y}_{x_2=25,9}=28,0$; $\bar{y}_{x_3=26,6}=26,0$; $\bar{y}_{x_4=26,8}=31,7$; $\bar{y}_{x_5=27,2}=29,5$; $\bar{y}_{x_6=27,7}=40,7$;

$\bar{y}_{x_7=28,2}=36,4$; $\bar{y}_{x_8=28,6}=33,0$; $\bar{y}_{x_9=29,8}=\dfrac{36,0+37,5}{2}=36,75$

(точки, соответствующие условным средним, на корреляционном поле обведены кружками). Соединяя эти точки, получим ломаную *L*, которая

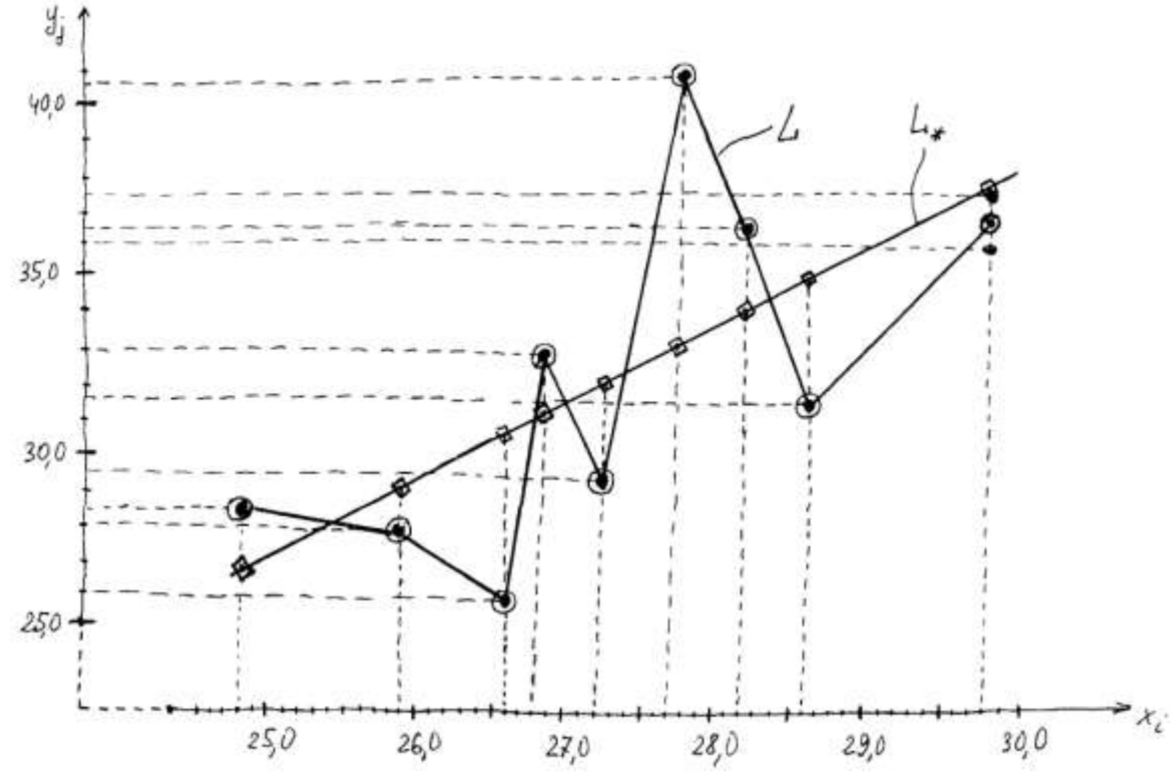


Рис. 6

является выборочной линией регрессии Y на X.

Теперь нужно решить следующую принципиальную задачу: в какой форме $\bar{y}_x^* = f^*(x)$ следует искать слаживающее (выравнивающее) уравнение этой выборочной линии регрессии *L*?

Для этого рассмотрим эту линию (ломаную *L*) внимательнее. Ее узлы имеют резкие перепады, но в целом просматривается увеличение высоты этих узлов (увеличение средних значений $\bar{y}_{x_i}$ диаметра деревьев) при увеличении значений $x_i$ (при увеличении высоты деревьев), что естественно и из биологических соображений. Заметного искривления выборочная ломаная регрессии не имеет, поэтому принимаем решение: слаживающее уравнение регрессии $\bar{y}_x^* = f^*(x)$ величины Y на величину X будем искать в виде уравнения прямой:

$$\bar{y}_x^* = kx + b$$

Как известно (см. конспект лекций, часть 2, §5), коэффициенты *к* и *b* этого уравнения находятся по формулам:

$$k = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\cdot\bar{y}}{\overline{x^2} - (\bar{x})^2}; \qquad b = \bar{y} - k\cdot\bar{x},$$

где

$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} x_i n_i$ - среднее выборочное значение признака X (высоты деревьев);

$\bar{y} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{m} y_j m_j$ - среднее выборочное значение признака Y (диаметра деревьев);

$\overline{x^2} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 n_i$ - среднее выборочное значение $X^2$

$\overline{xy} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i y_j n_{ij}$ - среднее выборочное значение произведения XY.

В нашей задаче *n*=9 – количество различных вариант $x_i$; *m*=10 – количество различных вариант $y_j$; *N*=10 – количество объектов выборки (количество обследованных деревьев). Используя эти формулы и данные корреляционной таблицы (таблицы 10), получаем:

$$\bar{x} = \frac{1}{10}(24{,}8\cdot 1 + 25{,}9\cdot 1 + 26{,}6\cdot 1 + 26{,}8\cdot 1 + 27{,}2\cdot 1 + 27{,}7\cdot 1 + 28{,}2\cdot 1 + 28{,}6\cdot 1 + 29{,}8\cdot 2) = 27{,}54$$

$$\bar{y} = \frac{1}{10}(26{,}0\cdot 1 + 28{,}0\cdot 1 + 28{,}5\cdot 1 + 29{,}5\cdot 1 + 31{,}7\cdot 1 + 33{,}0\cdot 1 + 36{,}0\cdot 1 + 36{,}4\cdot 1 + 37{,}5\cdot 1 + 40{,}7\cdot 1) = 32{,}73$$

$$\overline{x^2} = \frac{1}{10}(24{,}8^2\cdot 1 + 25{,}9^2\cdot 1 + 26{,}6^2\cdot 1 + 26{,}8^2\cdot 1 + 27{,}2^2\cdot 1 + 27{,}7^2\cdot 1 + 28{,}2^2\cdot 1 + 28{,}6^2\cdot 1 + 29{,}8^2\cdot 2) =$$
$$= 760{,}806$$

$$\overline{xy} = \frac{1}{10}(24{,}8\cdot 28{,}5\cdot 1 + 25{,}9\cdot 28{,}0\cdot 1 + 26{,}6\cdot 26{,}0\cdot 1 + 26{,}8\cdot 31{,}7\cdot 1 + 27{,}2\cdot 29{,}5\cdot 1 + 27{,}7\cdot 40{,}7\cdot 1 +$$
$$+ 28{,}2\cdot 36{,}4\cdot 1 + 28{,}6\cdot 33{,}0\cdot 1 + 29{,}8\cdot 36{,}0\cdot 1 + 29{,}8\cdot 37{,}5\cdot 1) = 906{,}353$$

$$k = \frac{906{,}353 - 27{,}54 \cdot 32{,}73}{760{,}806 - (27{,}54)^2} = 2{,}1104..... \approx 2{,}11; \quad b = 32{,}73 - 2{,}11 \cdot 27{,}54 \approx -25{,}38$$

Таким образом, искомое уравнение $\bar{y}_x^* = kx + b$ прямой, сглаживающей выборочную ломаную регрессии, имеет вид:

$$\bar{y}_x^* = 2{,}11x - 25{,}38$$

Подсчитаем по этому уравнению сглаживающие (теоретические) средние $\bar{y}_{x_i}^*$ и сравним их с реальными (выборочными) средними $\bar{y}_{x_i}$ (таблица 11).

Таблица 11

| $x_i$ | 24,8 | 25,9 | 26,6 | 26,8 | 27,2 | 27,7 | 28,2 | 28,6 | 29,8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 |
| $\bar{y}_{x_i}$ (*выб.*) | 28,5 | 28,0 | 26,0 | 31,7 | 29,5 | 40,7 | 36,4 | 33,0 | 36,75 |
| $\bar{y}_{x_i}^*$ (*теор.*) | 26,95 | 29,27 | 30,75 | 31,17 | 32,01 | 33,07 | 34,12 | 34,97 | 37,50 |

Контроль: должны выполнятся равенства:

$$1) \; \frac{\sum_{i=1}^{n} \bar{y}_{x_i} \cdot n_i}{N} = \bar{y} \qquad 2) \; \frac{\sum_{i=1}^{n} \bar{y}_{x_i}^* \cdot n_i}{N} = \bar{y}$$

И оба они, согласно данным таблицы 11, выполняются (убедитесь в этом самостоятельно):

1) 32,73=32,73;  2) 32,73=32,73

Построим по точкам с координатами $(x_i; \bar{y}_{x_i}^*)$ выравнивающую (сглаживающую) прямую регрессии (прямая $L_*$ на рис. 6). Эта прямая является наилучшей из прямых, сглаживающей точки корреляционного поля. С ее помощью оценивается линейная корреляционная зависимость между величинами X и Y (высотой и диаметром деревьев). Она показывает, как в среднем меняется толщина деревьев при изменении их высоты.

А теперь рассмотрим вопрос о степени тесноты этой линейной корреляционной зависимости Y от X и о качестве полученного сглаживающего линейного уравнения регрессии. Степень тесноты линейной корреляционной зависимости между X и Y определяется, как известно, величиной коэффициента линейной корреляции $\rho_{xy}$ между этими величинами. Его выборочное значение находится по формуле:

$$\rho_{xy} = \frac{\mu_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sigma_x \sigma_y},$$

где $\mu_{xy} = \overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}$ - выборочное значение корреляционного момента (ковариации) величин X и Y, а $\sigma_x = \sqrt{\overline{x^2} - (\bar{x})^2}$ и $\sigma_y = \sqrt{\overline{y^2} - (\bar{y})^2}$ - выборочные значения среднеквадратических отклонений $\sigma(X)$ и $\sigma(Y)$ величин X и Y соответственно.

Согласно предыдущим подсчетам, имеем:

$$\mu_{xy} = \overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y} = 906{,}353 - 27{,}54 \cdot 32{,}73 = 4{,}9688$$

$$\sigma_x = \sqrt{760{,}860 - (27{,}54)^2} = 1{,}5344$$

Величины $\overline{y^2}$ и $\sigma_y$ ранее подсчитаны не были. Подсчитаем их:

$$\bar{y}^2 = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{m} y_j^2 m_j = \frac{1}{10}(26{,}0^2 \cdot 1 + 28{,}0^2 \cdot 1 + 28{,}5^2 \cdot 1 + 29{,}5^2 \cdot 1 + 31{,}7^2 \cdot 1 + 33{,}0^2 \cdot 1 + 36{,}0^2 \cdot 1 +$$

$$+ 36{,}4^2 \cdot 1 + 37{,}5^2 \cdot 1 + 40{,}7^2 \cdot 1) = 1092{,}009$$

$$\sigma_y = \sqrt{1092{,}009 - (32{,}73)^2} \approx 4{,}5559$$

А теперь подсчитаем выборочный коэффициент линейной корреляции $\rho_{xy}$:

$$\rho_{xy} = \frac{\mu_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{4{,}9688}{1{,}5344 \cdot 4{,}5559} \approx 0{,}71$$

Значение $\rho_{xy}$ оказалось значительно ближе к 1, нежели к 0, поэтому можно сделать вывод, что имеется достаточно определенная (тесная) линейная корреляционная зависимость Y от X.

Впрочем, мы вправе были бы сделать такой вывод, если бы найденное значение $\rho_{xy} = 0{,}71$ было значением генерального коэффициента линейной корреляции, а не выборочного. В генеральной совокупности (во всем лесу, из которого случайным образом отобраны и обследованы те 10 деревьев, которые фигурируют в нашей выборке), величина $\rho_{xy}$ может быть совсем другой. В частности, в генеральной совокупности признаки X и Y объектов этой совокупности (высота X и диаметр Y деревьев) могут оказаться и некоррелированы. То есть может оказаться, что генеральный коэффициент линейной корреляции $\rho_{xy} = 0$ (или близок к нулю). А то, что в выборке $\rho_{xy}$ значительно отличается от нуля и, следовательно, выборка указывает на коррелированность признаков X и Y, может объясняться случайностью выборки и недостаточностью ее объема.

В связи с этим поставим вопрос о значимости (отличности от нуля) генерального коэффициента линейной корреляции. Иначе говоря, поставим вопрос о наличии корреляции между высотой X и диаметром Y деревьев того леса, из которого сделана данная выборка.

Выдвинем нулевую гипотезу $H_0$ : в генеральной совокупности $\rho_{xy} = 0$, то есть признаки X и Y этой совокупности некоррелированы. Проверим эту гипотезу при заданном (стандартном) уровне значимости $\alpha = 0{,}05$. В качестве критерия проверки справедливости выдвинутой гипотезы $H_0$ рассмотрим случайную величину

$$T = \frac{\rho_{xy} \cdot \sqrt{N-2}}{\sqrt{1-\rho_{xy}^2}},$$

имеющую, при справедливости гипотезы $H_0$ и нормальности признаков X и Y, распределение Стьюдента с $k = N-2$ степенями свободы. Гипотеза $H_0$ отвергается, если $T \notin \left[-t_{kp}(\alpha;k);\ t_{kp}(\alpha;k)\right]$, где $t_{kp}(\alpha;k)$ находится по таблице критических точек распределения Стьюдента (см. конспект лекций, Приложение, табл. 4). И гипотеза $H_0$ принимается, если $T \in \left[-t_{kp}(\alpha;k);\ t_{kp}(\alpha;k)\right]$. В нашей задаче $\alpha = 0{,}05$, $k = N-2 = 10-2 = 8$,

$$T = \frac{0{,}71 \cdot \sqrt{8}}{\sqrt{1-0{,}71^2}} = 2{,}85; \quad t_{kp} = t_{kp}(0{,}05;\ 8) = 2{,}31$$

Таким образом, $T = 2{,}58 \notin \left[-t_{kp};\ t_{kp}\right] = \left[-2{,}31;\ 2{,}31\right]$, а значит, гипотезу $H_0$ об отсутствии корреляции между X и Y <u>отвергаем.</u> То есть, подтверждаем, что $\rho_{xy} \neq 0$ не только в выборке, но и во всей генеральной совокупности. А, следовательно, высота X и диаметр Y деревьев в исследуемом лесу коррелированны – при изменении одной из этих величин меняется и среднее значение другой. Это согласуется и с биологией деревьев: чем выше деревья, тем, они толще.

А теперь исследуем качество построенного уравнения регрессии $\bar{y}_x^* = 2{,}11x - 25{,}38$, график которого (прямая $L_*$) сглаживает выборочную ломаную регрессии $L$ (рис. 6). Сначала исследуем его на адекватность выборочным данным. Для этого по формулам

$$s^2_{повт.} = \frac{Q_{повт.}}{k_{повт.}}; \qquad s^2_{адекв.} = \frac{Q_{адекв.}}{k_{адекв.}},$$

где

$$Q_{повт.} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(y_j - \bar{y}_{x_i})^2 n_{ij}; \qquad Q_{адекв.} = \sum_{i=1}^{n}(\bar{y}^*_{x_j} - \bar{y}_{x_i})^2 n_i;$$

$$k_{повт.} = N - n; \quad k_{адекв.} = n - q,$$

подсчитаем так называемые дисперсию повторности $s^2_{повт.}$ и дисперсию адекватности $s^2_{адекв.}$. Используя данные таблиц 10 и 11, получаем:

$$Q_{повт.} = (28{,}5 - 28{,}5)^2 \cdot 1 + (28{,}0 - 28{,}0)^2 \cdot 1 + ...(31{,}7 - 31{,}7)^2 \cdot 1 + (36{,}0 - 36{,}75)^2 \cdot 1 +$$
$$+ (37{,}5 - 36{,}75)^2 \cdot 1 = 0 + 0 + ... + 0 + 0{,}5625 + 0{,}5625 = 1{,}125$$

$$Q_{адекв.} = (26{,}95 - 28{,}5)^2 \cdot 1 + (29{,}27 - 28{,}0)^2 \cdot 1 + (30{,}75 - 26{,}0)^2 \cdot 1 + (31{,}17 - 31{,}7)^2 \cdot 1 +$$
$$+ (32{,}01 - 29{,}5)^2 \cdot 1 + (33{,}07 - 40{,}7)^2 \cdot 1 + (34{,}12 - 36{,}4)^2 \cdot 1 + (34{,}97 - 33{,}0)^2 \cdot 1 +$$
$$+ (37{,}50 - 36{,}75)^2 \cdot 2 = 101{,}5801$$

$k_{повт.} = N - n = 10 - 9 = 1$ - число степеней свободы дисперсии $s^2_{повт.}$

$k_{адекв.} = n - q = 9 - 2 = 7$ - число степеней свободы дисперсии $s^2_{адекв.}$.

($q = 2$ – число коэффициентов в выбранном сглаживающем уравнении регрессии $\bar{y}_x^* = kx + b = 2{,}11x - 25{,}38$).

$$s^2_{повт.} = \frac{1{,}125}{1} = 1{,}125; \quad s^2_{адекв.} = \frac{101{,}58}{7} = 14{,}51$$

Теперь найдем выборочное значение $f_{выб.}$ критерия $F$ Фишера-Снедекора

$$f_{выб.} = \frac{s^2_{адекв.}}{s^2_{повт.}} = \frac{14{,}51}{1{,}125} \approx 12{,}9$$

и сравним его с критическим значением $f_{кр}(\alpha; k_{адекв.}; k_{повт.})$ этого критерия, найденном в таблице 5 Приложения к конспекту лекций:

$$f_{kp} = f_{кр}(0{,}05;\, 7;\, 1) = 237$$

Как оказалось, $f_{выб.} \prec f_{kp}$, поэтому у нас нет оснований при заданном уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ отвергать нулевую гипотезу $H_0$ об адекватности выборочным данным построенного сглаживающего уравнения регрессии $\bar{y}_x^* = 2{,}11x - 25{,}38$ (уравнение это адекватно, а значит, пригодно к использованию).

В заключение подсчитаем выборочный коэффициент детерминации $d_{yx}$, определяющий долю общего изменения (вариации) величины Y в выборке, объясняемой подобранным сглаживающим уравнением регрессии. Этот коэффициент подсчитывается по формуле:

$$d_{yx} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(\bar{y}_{x_i}^* - \bar{y}\right)^2 n_i}{\sum_{j=1}^{m} \left(y_j - \bar{y}\right)^2 m_j}$$

Но если уравнение регрессии построено в линейной форме $\bar{y}_x^* = kx + b$ (а у нас именно так), то $d_{yx}$ можно подсчитать проще:

$$d_{yx} = \rho_{xy}^2 = (0{,}71)^2 = 0{,}504 = 50{,}4\%$$

То есть, построенное нами линейное уравнение регрессии объясняет чуть больше 50% общего объёма вариации величины Y. Максимально же возможное значение выборочного коэффициента детерминации таков:

$$(d_{yx})_{\max} = \eta_{yx}^2,$$

где

$$\eta_{yx} = \frac{\sigma_{\bar{y}_x}}{\sigma_y} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \left(\bar{y}_{x_i} - \bar{y}\right)^2 n_i}{\sum_{j=1}^{m} \left(y_j - \bar{y}\right)^2 m_j}}$$

- выборочное корреляционное отношение, характеризующее долю, которую составляет разброс средних значений величины Y по отношению к общему разбросу значений этой величины. Используя предыдущие числовые данные, получаем (вычисления опускаем):

$$\eta_{yx} \approx 0{,}997; \quad (d_{yx})_{\max} = (0{,}997)^2 \approx 0{,}995 = 99{,}5\%$$

Таким образом, имеется возможность за счёт выбора другой, более сложной (нелинейной) формы сглаживающего уравнения регрессии $\bar{y}_x^* = f(x)$, существенно увеличить выборочный коэффициент детерминации $d_{yx}$ (повысить его с 50,4% до 99,5%). При $(d_{yx})_{\max} = 99{,}5\%$ соответствующая сглаживающая линия регрессии $L_*$ (см. рис. 6) прошла бы через все узлы выборочной ломаной $L$ (они помечены кружками). Эта линия, как и её уравнение, по сравнению с прямой $L_*$ и её уравнением, сильно бы усложнились. И при этом ещё не факт, что новое, более сложное, сглаживающее уравнение регрессии $\bar{y}_x^* = f(x)$ стало бы лучше построенного выше простого линейного уравнения. Ибо узлы сглаживаемой ломаной $L$, найденные по единичным, бесповторным измерениям величины Y (кроме последнего узла, найденного по двум повторным измерениям) очень ненадёжны и при другой выборке могут оказаться совсем другими. Поэтому строить какое-то другое, нелинейное сглаживающее уравнение регрессии взамен построенного простого линейного мы не будем.

<u>Примечание.</u> Если в таблице 10 все $n_i = 1$, то есть повторных вариант $y_j$ ни при каких вариантах $x_i$ нет, то дисперсия повторности $s^2_{повт.} = 0$, и тогда проводить исследование на адекватность построенного выборочного уравнения регрессии смысла нет – это исследование невозможно. То есть вопрос об адекватности построенного уравнения регрессии остается открытым.

Задание 6 выполнено.

---

## ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНЫХ И КУРСОВЫХ РАБОТ

### **Индивидуальное задание №1 по высшей математике.**

В задачах 1-20 даны вершины ΔABC. Найти: 1) длину стороны AB; 2) уравнения сторон AB и AC и их угловые коэффициенты; 3) внутренний угол A в радианах с точностью до 0,01; 4) уравнение высоты CD и её длину; 5) уравнение окружности, для которой высота CD есть диаметр; 6) систему линейных неравенств, определяющих ΔABC.

1. (-5;0), B(7;9), C(5;-5).
2. A(-7;7), B(5;11), C(3;-3).
3. A(-5;-3), B(7;6), C(5;-8).
4. A(-6;-2), B(6;7), C(4;-7).
5. A(-8;-4), B(4;5), C(2;-9).
6. A(0;-1), B(12;8), C(10;-6).
7. A(-6;1), B(6;10), C(4;-4).
8. A(-2;-4), B(10;5), C(8;-9).
9. A(-3;0), B(9;9), C(7;-5).
10. A(-9;-2), B(3;7), C(1;-7).
11. A(-5;2), B(7;-7), C(5;7).
12. A(-7;5), B(5;-4), C(3;10).
13. A(-7;1), B(5;-8), C(3;6).
14. A(0;3), B(12;-6), C(10;8).
15. A(-8;4), B(4;-5), C(2;9).
16. A(-2;2), B(10;-7), C(8;7).
17. A(1;2), B(13;-7), C(11;7).
18. A(-4;1), B(8;-8), C(6;6).
19. A(-7;-1), B(-5;-10), C(3;4).
20. A(-3;3), B(9;-6), C(7;8).

В задачах 21-25 составить уравнение линии, для каждой точки которой отношение расстояний до точки $A(x_1; y_1)$ и до прямой $x = a$ равно числу $\varepsilon$. Полученное уравнение привести к простейшему виду и построить кривую.

21. A(4;0), $a = 9$, $\varepsilon = \frac{2}{3}$.
22. A(-8;0), $a = -2$, $\varepsilon = 2$.
23. A(4;0), $a = 1$, $\varepsilon = 2$.
24. A(9;0), $a = 4$, $\varepsilon = 1{,}5$.
25. A(-1;0), $a = -4$, $\varepsilon = 0{,}5$.

В задачах 26-30 составить уравнение линии, для каждой точки которой её расстояние до точки $A(x_1; y_1)$ равно расстоянию до прямой $y = b$. Полученное уравнение привести к простейшему виду и построить кривую.

26. A(2;1), $b = -1$.
27. A(2;-1), $b = 2$.
28. A(4;-1), $b = 1$.
29. A(-2;-2), $b = -4$.
30. A(2;-1), $b = 1$.

## Индивидуальное задание №2

Задание 1 - 23. Построить окружность.

1) $x^2 + y^2 + 4x - 8y - 5 = 0$
2) $x^2 + y^2 + 6x - 4y - 3 = 0$
3) $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$
4) $x^2 + y^2 - 8y - 9 = 0$
5) $x^2 + y^2 - 6x + 10y + 18 = 0$
6) $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$
7) $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$
8) $x^2 + y^2 + 8x + 7 = 0$
9) $x^2 + y^2 - 12y + 11 = 0$
10) $4x^2 + 4y^2 - 16x + 8y - 5 = 0$
11) $x^2 + y^2 + 2x - 12y + 1 = 0$
12) $x^2 + y^2 - 12x + 11 = 0$
13) $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 6 = 0$
14) $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 5 = 0$
15) $x^2 + y^2 - 12x + 2y + 12 = 0$
16) $3x^2 + 3y^2 - 6x + 8y = 0$
17) $x^2 + y^2 + 4x - 4y = 0$
18) $x^2 + y^2 + 4x + 12y + 15 = 0$
19) $x^2 + y^2 + 8x - 9 = 0$
20) $x^2 + y^2 + x - 3y - 1 = 0$
21) $x^2 + y^2 - 6x - 8y - 3 = 0$
22) $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 13 = 0$
23) $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 15 = 0$

Задание 24 - 30. Построить эллипс. Найти его полуоси, координаты фокусов и эксцентриситет.

24) $x^2 + 2y^2 = 8$
25) $9x^2 + 25y^2 = 225$
26) $3x^2 + 4y^2 - 12 = 0$
27) $5x^2 + 9y^2 = 45$
28) $4x^2 + 9y^2 = 400$
29) $12x^2 + 36y^2 - 36 = 0$
30) $9x^2 + 16y^2 = 144$

## Индивидуальное задание №3

Задание1-10. Построить гиперболу и ее асимптоты. Найти фокусы и эксцентриситет.

1) $16x^2 - 25y^2 = 400$
2) $x^2 - 4y^2 = 4$
3) $x^2 - 4y^2 = 16$
4) $x^2 - 9y^2 = 36$
5) $x^2 - 4y^2 = 36$
6) $4x^2 - 25y^2 = 100$
7) $x^2 - 9y^2 = 9$
8) $9x^2 - 4y^2 = 324$
9) $9x^2 - 16y^2 = 144$
10) $25x^2 - 81y^2 = 2025$

Задание 11-20.Составить каноническое уравнение и построить гиперболу, если известны расстояние между фокусами 2c и мнимая полуось b.

11) $2c = 2\sqrt{10}, \quad b = 1$

12) $2c = 6\sqrt{13}, \quad b = 6$

13) $2c = 10, \quad b = 3$

14) $2c = 2\sqrt{106}, \quad b = 5$

15) $2c = 2\sqrt{41}, \quad b = 4$

16) $2c = 2\sqrt{5}, \quad b = 1$

17) $2c = 4\sqrt{5}, \quad b = 2$

18) $2c = 4\sqrt{10}, \quad b = 2$

19) $2c = 6\sqrt{5}, \quad b = 3$

20) $2c = 2\sqrt{29}, \quad b = 2$

Задание 21-30. Составить каноническое уравнение и построить гиперболу, если расстояние между ее вершинами равно 2a, эксцентриситет ε.

21) $2a = 12, \quad \varepsilon = \sqrt{10}/3$

22) $2a = 12, \quad \varepsilon = \sqrt{5}/2$

23) $2a = 10, \quad \varepsilon = \sqrt{29}/5$

24) $2a = 6, \quad \varepsilon = \sqrt{10}/3$

25) $2a = 18, \quad \varepsilon = \sqrt{13}/3$

26) $2a = 8, \quad \varepsilon = 1.25$

27) $2a = 18, \quad \varepsilon = \sqrt{106}/9$

28) $2a = 10, \quad \varepsilon = \sqrt{41}/5$

29) $2a = 4, \quad \varepsilon = \sqrt{5}/2$

30) $2a = 8, \quad \varepsilon = \sqrt{5}/2$

## Индивидуальное задание №4

Вычислить пределы.

1. $а)\ \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-7x+2}{2x^2-5x+2};\quad б)\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-3x+1}{4x^2+x-2};$

   $в)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{tg\,2x};\quad г)\ \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)^{2x+3}$

2. $а)\ \lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x^2-8x+7}{(x-7)^2};\quad б)\ \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{3x-2}-2}{x-2};$

   $в)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x}{3x};\quad г)\ \lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{2}{x}}$

3. $а)\ \lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2+x-1}{5x^2+4x-1};\quad б)\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+2x-x^2}{4x^2-5x+2};$

   $в)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\arcsin 3x};\quad г)\ \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x-1}\right)^{4x}$

4. $а)\ \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2-1};\quad б)\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-3}{4x^3+5x};$

   $в)\ \lim\limits_{x\to 0} tg\,2x\cdot ctg\,4x;\quad г)\ \lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{3}{x}}$

5. а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2+3x+1}{x^3+1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+4}{x+1}\right)^{2x+2}$

6. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-10x+8}{x^2-4}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x}-2x}{3x+1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\arg tg\, 2x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2x+1}{2x-1}\right)^{3x}$

7. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{2x^2-x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}{x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin 6x}{1-\cos x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{3x+2}{3x+1}\right)^{6x-4}$

8. а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-9}$; б) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x}-2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg\, 5x}{tg\, 3x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x+3}{x+4}\right)^{2x-1}$

9. а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-x-2}{x^3+1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{tg\, 3x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}(1+5x)^{\frac{3}{x}}$

10. а) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x^2+5x-3}{x^2+4x+3}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2x-2}-1}{\sqrt{3x+4}-2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x}{x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+2}{4x-1}\right)^{2x+3}$

11. а) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3x^2+5x-2}{x^2+3x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt[3]{8-x}-\sqrt[3]{8+x}}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} tg\, 3x\cdot ctg\, 5x$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-3}{x+4}\right)^{x-1}$

12. а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-9}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-4}{x+\sqrt[3]{x}}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\arg tg\, 3x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-2}{3x-1}\right)^{6x+4}$

13. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5x^2-4x-1}{x^2-6x+5}$; б) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{x+2}+x}{x+1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\sin 4x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{4}{x}}$

14. $a)\ \lim\limits_{x\to -1}\dfrac{7x^2+8x+1}{2x+2};\quad б)\ \lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2+3x}\right);$

$в)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg6x}{tg3x};\quad г)\ \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x+2}{5x-3}\right)^{2x+1}$

15. $a)\ \lim\limits_{x\to -4}\dfrac{2x^2+6x-8}{x^2-16};\quad б)\ \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^2}{\sqrt[3]{x^2+1}-1}\right);$

$в)\ \lim\limits_{x\to 0} tg4x\cdot ctg2x;\quad г)\ \lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{5}{x}}$

16. $a)\ \lim\limits_{x\to 10}\dfrac{5x^2-51x+10}{2x-20};\quad б)\ \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x^2}\right);$

$в)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{\arcsin 2x};\quad г)\ \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x-3}{4x+2}\right)^{2x+1}$

17. $a)\ \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-7x+3}{x^2-x-6};\quad б)\ \lim\limits_{x\to 5}\left(\dfrac{x^2-25}{\sqrt{2x-1}-3}\right);$

$в)\ \lim\limits_{x\to 0} x\cdot ctg3x;\quad г)\ \lim\limits_{x\to -1}(2x+3)^{\frac{1}{x+1}}$

18. $a)\ \lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2+2x+1}{2x^2+3x+1};\quad б)\ \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1-3x-2x^2}{x^2-4x+3}\right);$

$в)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{tg4x};\quad г)\ \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2}{x+3}\right)^{4-x}$

19. $a)\ \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-5x+2}{4x^2-7x-2};\quad б)\ \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-3x+1}{4x^2-5x+2}\right);$

$в)\ \lim\limits_{x\to 0} x\cdot ctg2x;\quad г)\ \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x+1}\right)^{x-2}$

20. $a)\ \lim\limits_{x\to 4}\dfrac{8+2x-x^2}{x^2-16};\quad б)\ \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-x+3}{x^3-2x^2-1}\right);$

$в)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg3x}{x};\quad г)\ \lim\limits_{x\to 4}(x-3)^{\frac{2}{x-4}}$

21. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^6-x^3+2x}{2x^4-1}$; б) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+x-2}{x^2-x-6}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x-1}\right)^x$

22. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-5x+1}{6x^2+3x-4}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-x}{2(x^2-1)}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{3x}$;  г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)^{x+3}$

23. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{10x+5}{0{,}01x^2-6x}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-x-2}{3x^2-4x+1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\sin 2x}$;  г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^{3x-2}$

24. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+3x^2+4x^3}{x-3x^2+4x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-5x+2}{x+10^{10}}$;

в) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-2x-15}{2x^2-7x-15}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sin 5x}$

25. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-4x+1}{x^2-3x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+5}{x^2+1}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^5-3x^2+8}{2x^5+2x-1}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+3}\right)^{x+2}$

26. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{2x^2-5x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-3x-4}{x^4+1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x}{x^2+x}$;  г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+5}{x}\right)^{3x}$

27. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1000x}{x^2-1}$;  б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg\,7x}{\sin\frac{x}{2}}$;

в) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x^2+x-12}{x^2+2x-8}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^{x-1}$

28. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2+5x-7}{3x^2-x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-5x+1}{3x^3+7}$

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+8x-2}{x^3-2x^2+1}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1}$

29. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+x^2+x+1}{x^3-x^2+x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+x-1}{x+3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{5x^2}$;  г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x-4}\right)^{x+2}$

30. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+x^2+x+1}{x+5}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2+x-3}{x^2+x-2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}$;  г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x}\right)^{2x+3}$

## Индивидуальное задание №5

Найти производные функций:

1. *а*) $y = xtgx + \ln\cos x + e^{5x}$; *б*) $y = e^{x-\arcsin x}$; *в*) $x^3y^2 - 2xy + 3 = 0$

2. $а)\ y=\ln\frac{x^2}{x+1}+3x\sqrt[3]{x};\quad б)\ y=2^{arctgx-x^2};\ в)\ x^2y^2-\cos x=0$

3. $а)\ y=x^2+x\cdot\arcsin x+\sqrt{1-x^2};\quad б)\ y=2^{\arcsin\frac{1}{x}};\ в)\ \cos(xy)-2x=0$

4. $а)\ y=\ln\frac{(x-1)^2}{x+2}+3\sqrt[3]{x^2};\quad б)\ y=2^{\frac{4}{\sin x}};\ в)\ \frac{x}{y}+xy-2=0$

5. $а)\ y=\ln\frac{x^2}{x-1}+4x\sqrt[4]{x};\quad б)\ y=\left(e^{\sin x}+3x\right)^3;\ в)\ 5x^2y^2-7y+4=0$

6. $а)\ y=x^3(3\ln x-1)-\frac{x+1}{e^x};\quad б)\ y=\left(5^{tg2x}+3\right)^4;\ в)\ x^3y^3-2xy+1=0$

7. $а)\ y=\ln\frac{(x+1)^2}{x+3}+3x\sqrt[3]{x};\quad б)\ y=5^{\arcsin x^2};\ в)\ x^2+xy+y^2=3$

8. $а)\ y=e^{5x}(5x-1)-\frac{2\ln x+1}{x^2};\quad б)\ y=4^{arctg\frac{3}{x}};\ в)\ x^2+y^2-xy=0$

9. $а)\ y=\ln\frac{(x+1)^2}{x-2}+4\sqrt[4]{x^3};\quad б)\ y=2^{\sin^3\frac{1}{x}};\ в)\ x^3+y^3-3xy=0$

10. $а)\ y=x(\ln x-1)+e^{3x}(3x-1);\quad б)\ y=3^{\cos^2 4x};\ в)\ x^4+y^4=x^2y^2$

11. $а)\ y=x\cdot\arccos\frac{x}{2}-\sqrt{4-x^2};\quad б)\ y=e^{x\cdot\sin^2 x};\ в)\ y=1+xe^y$

12. $а)\ y=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a};\quad б)\ y=e^{\sqrt{x+1}};\ в)\ y^3+e^{xy}=0$

13. $а)\ y=\ln\left(3x^2+\sqrt{9x^4+1}\right);\quad б)\ y=x\cdot 10^{\sqrt{x}};$
$в)\ xy+e^y=0$

14. $а)\ y=-ctg^2\frac{x}{2}-2\ln\sin\frac{x}{2};\quad б)\ y=2^{x\cdot tgx}$
$в)\ x^2y^3-\sin y+3=0$

15. $а)\ y=\frac{(2x+1)\sqrt{x^2-x}}{x^2};\quad б)\ y=e^{-x^2}\cdot\ln x$
$в)\ \sin x+xy^2=0$

16. $а)\ y=\frac{\sqrt{2x+3}(x-2)}{x^2};\quad б)\ y=e^{\sqrt{\ln x}}$
$в)\ x^3y^2-\cos y+4=0$

17. $a)\ \ y=\dfrac{1+x^2}{2\sqrt{1+2x^2}};\quad б)\ \ y=e^{1-\sin^2 x}$

$в)\ \ln y+xy-5=0$

18. $a)\ \ y=e^x(\cos 2x+2\sin 2x);\quad б)\ \ y=2^{\sin^3 x}$

$в)\ x^2y^3+x\ln y=0$

19. $a)\ \ y=\arcsin\sqrt{x}+\sqrt{1-x};\quad б)\ \ y=e^{\arcsin\ 2x}$

$в)\ tgy-xy^2=0$

20. $a)\ \ y=arctg(x+1)+\dfrac{x+1}{x^2+2x+2};\quad б)\ \ y=\sin 2^x$

$в)\ \sin y-xy^2+4=0$

21. $a)\ \ y=xtgx+\ln\cos x+e^{5x};\quad б)\ \ y=e^{x-\arcsin x};\ в)\ \ x^2y^2-\cos x=0$

22. $a)\ \ y=\ln\dfrac{x^2}{x+1}+3x\sqrt[3]{x};\quad б)\ \ y=2^{arctgx-x^2};\ в)\ \ x^3y^2-2xy+3=0$

23. $a)\ \ y=x^2+x\cdot\arcsin x+\sqrt{1-x^2};\quad б)\ \ y=2^{\arcsin\frac{1}{x}};\ в)\ \ x^4+y^4=x^2y^2$

24. $a)\ \ y=\ln\dfrac{(x-1)^2}{x+2}+3\sqrt[3]{x^2};\quad б)\ \ y=2^{\frac{4}{\sin x}};\ в)\ \ x^3+y^3-3xy=0$

25. $a)\ \ y=\ln\dfrac{x^2}{x-1}+4x\sqrt[4]{x};\quad б)\ \ y=\left(e^{\sin x}+3x\right)^3;\ \ в)\ \ 5x^2y^2-7y+4=0$

26. $a)\ \ y=x^3(3\ln x-1)-\dfrac{x+1}{e^x};\quad б)\ \ y=\left(5^{tg 2x}+3\right)^4;\ \ в)\ \ x^3y^3-2xy+1=0$

27. $a)\ \ y=\ln\dfrac{(x+1)^2}{x+3}+3x\sqrt[3]{x};\quad б)\ \ y=5^{\arcsin x^2};\ \ в)\ \ x^2+xy+y^2=3$

28. $a)\ \ y=e^{5x}(5x-1)-\dfrac{2\ln x+1}{x^2};\quad б)\ \ y=4^{arctg\frac{3}{x}};\ в)\ \ x^2+y^2-xy=0$

29. $a)\ \ y=\ln\dfrac{(x+1)^2}{x-2}+4\sqrt[4]{x^3};\quad б)\ \ y=2^{\sin^3\frac{1}{x}};\ в)\ \ \dfrac{x}{y}+xy-2=0$

30. $a)\ \ y=x(\ln x-1)+e^{3x}(3x-1);\quad б)\ \ y=3^{\cos^2 4x};\ \ в)\ \ \cos(xy)-2x=0$

## Индивидуальное задание №6

Найти касательные к графику функции  в точках ее пересечения с осью ОХ. Построить график данной функции и касательные.

1. $y=x^2-x-2$ 2. $y=x^2-4x+3$ 3. $y=x^2-2x-8$

4. $y=x^2-6x+5$ 5. $y=x^2-5x+6$ 6. $y=x^2-5x+4$

7. $y=x^2-5x-6$ 8. $y=x^2-7x+10$ 9. $y=x^2-3x-4$

10. $y=x^2-6x+8$ 11. $y=x^2-3x+2$ 12. $y=x^2-x-6$

13. $y=x^2-4x-5$ 14. $y=x^2-7x+6$ 15. $y=x^2-2x-3$

16. $y=x^2-x-12$ 17. $y=x^2-7x-8$ 18. $y=x^2+x-2$

19. $y=x^2+4x+3$ 20. $y=x^2+2x-8$ 21. $y=x^2+6x+5$

22. $y=x^2+5x+6$ 23. $y=x^2+5x+4$ 24. $y=x^2+5x-6$

25. $y=x^2+7x+10$ 26. $y=x^2+3x-4$ 27. $y=x^2+2x-3$

28. $y=x^2+x-12$ 29. $y=x^2+7x-8$ 30. $y=x^2-2x-3$

## Индивидуальное задание №7

Исследовать функцию и построить ее график:

1. $y=\frac{x^2+8}{x+3}$. 2. $y=\frac{x^2+3}{x+1}$ 3. $y=\frac{x^2+7}{x-3}$ 4. $y=\frac{x^2-8}{x+3}$

5. $y=\frac{x^2+5}{x-3}$ 6. $y=\frac{x^2+9}{x-4}$ 7. $y=\frac{x^2+10}{x+4}$ 8. $y=\frac{x^2-7}{x-4}$

9. $y=\frac{x^2+8}{x+4}$ 10. $y=\frac{x^2+32}{x-2}$ 11. $y=\frac{x^2-8}{x-3}$ 12. $y=\frac{x^2+9}{x}$

13. $y=\frac{x^2-3}{x-2}$ 14. $y=\frac{x^2-12}{x-4}$ 15. $y=\frac{x^2-15}{x-4}$ 16. $y=\frac{x^2+20}{x-4}$

17. $y=\frac{x^2+25}{x}$ 18. $y=\frac{x^2-15}{x+4}$ 19. $y=\frac{x^2+8}{x+1}$ 20. $y=\frac{x^2+16}{x+3}$

21. $y=\frac{x^2+21}{x-2}$ 22. $y=\frac{x^2+24}{x+1}$ 23. $y=\frac{x^2+27}{x+3}$ 24. $y=\frac{x^2-5}{x-3}$

25. $y=\frac{x^2+5}{x+2}$ 26. $y=\frac{x^2+4}{x}$ 27. $y=\frac{x^2}{x-1}$ 28. $y=\frac{x^2+3}{x-1}$

29. $y=\frac{x^2+9}{x+4}$ 30. $y=\frac{x^2-3}{x-2}$

## Индивидуальное задание №8

Вариант 1

Найти неопределенные интегралы и выполнить проверку

1. $\int\left(\sqrt{3}x^2-4x+\frac{3}{x}\right)dx$; 2. $\int\left(\sqrt[3]{x^2}+\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{3}{x^3}\right)dx$; 3. $\int\left(x+\sqrt{x}\right)\cdot\left(\sqrt[3]{x}-\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}\right)dx$;

4. $\int 2^x\left(3-\frac{2^{-x}}{Cos^2x}\right)dx$; 5. $\int\left(x+\frac{1}{2}\right)^{10}dx$; 6. $\int\frac{x^3dx}{2x^4-1}$;

7. $\int e^xSin\left(e^x+1\right)dx$; 8. $\int\frac{Cos(2\ln\,x-1)}{x}dx$; 9. $\int e^{2Sin\,x}Cos\;x\;dx$;

10. $\int\frac{2Ctg\;x-1}{Sin^2x}dx$; 11. $\int\frac{arctg\;x+1}{1+x^2}dx$; 12. $\int\frac{3x\;dx}{1+x^4}$;

13. $\int\frac{Sin\;x\;dx}{3-4Cos\;x}$; 14. $\int\frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2x}}$; 15. $\int(1\text{-}x)\ Sin\ x\ dx$;

16. $\int(2x+3)\ e^{2x}\ dx$; 17. $\int x^2\ Cos\ 2x\ dx$; 18. $\int(1\text{-}x^2)\ e^{3x}\ dx$;

19. $\int x^5\ \ln\ 2x\ dx$; 20. $\int arcsin\ x\ dx$; 21. $\int\frac{2dx}{x-7}$;

22. $\int\frac{2x-3}{16x^2+8x+3}dx$; 23. $\int\frac{\left(-27x^2+41x-10\right)dx}{(x+1)\left(9x^2-12x+5\right)}$; 24. $\int\frac{x-4}{x^2-5x+6}dx$;

25. $\int\frac{x^4+3x^3+2x^2+x+1}{x^2+x+1}dx$; 26. $\int(\sin 3x\cdot\sin 6x)dx$; 27. $\int\sin^2x\cdot\cos^2x\,dx$;

28. $\int\sin^3x\cdot\cos x\,dx$; 29. $\int\frac{\cos^2x}{\sin^6x}dx$; 30. $\int\frac{dx}{1+2\cos x}$;

31. $\int\frac{2x+5}{\sqrt{x-4}}dx$; 32. $\int\frac{\sqrt{x+1}\,dx}{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x+1}}$; 33. $\int\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx$;

34. $\int\frac{dx}{arctg\,2x\left(1+4x^2\right)}$; 35. $\int\frac{5x-11}{x\left(x^2+4\right)}dx$; 36. $\int\left(\frac{x^{0,2}}{\sqrt[5]{x}}+\frac{x^2}{3\sqrt{x}}-\sqrt[3]{2x}\right)dx$;

37. $\int\frac{x-1}{\sqrt{x+1}}dx$; 38. $\int\sin^2x\cos^2x\ dx$; 39. $\int\left(x^2+4\right)e^{-2x}\ dx$;

40*. $\int\frac{\sqrt{x}\ dx}{1+x^{3/2}}$;

Вариант 2

Найти неопределенные интегралы и выполнить проверку

1. $\int\left(4x^3-\sqrt{x}+\frac{6}{x^2}\right)dx$; 2. $\int\left(\frac{1}{x\sqrt{x}}+\sqrt[3]{x^4}\right)^2dx$; 3. $\int\frac{x\sqrt[3]{x}-\frac{2}{\sqrt[4]{x}}}{x^2}dx$;

4. $\int Sin^2\frac{x}{2}\,dx$; 5. $\int\frac{dx}{3x-5}$; 6. $\int x^2Sin\left(x^3+1\right)dx$;

7. $\int e^xCos\;e^xdx$; 8. $\int\frac{dx}{x\;Cos^2\ln\;x}$; 9. $\int\frac{Sin\;x\;dx}{1+Cos^2x}$;

10. $\int \frac{dx}{Cos^2 x\,(1-3tg\ x)}$; 11. $\int \frac{dx}{\arcsin\ x\,\sqrt{1-x^2}}$; 12. $\int \frac{dx}{(3-Ctg\ x)Sin^2 x}$;

13. $\int \frac{e^x dx}{1+e^{2x}}$; 14. $\int Sin^2 x\, Cos\ x\, dx$; 15. $\int(4-x)\ Cos\ x\ dx$;

16. $\int(2x-1)\ e^{3x}\ dx$; 17. $\int(x^2+7)\ Sin\ x\ dx$; 18. $\int(x-3)^2\ e^x\ dx$;

19. $\int \frac{\ln^2\ x dx}{\sqrt{x}}$; 20. $\int arctg\ 3x\ dx$; 21. $\int \frac{dx}{(3x+2)^2}$;

22. $\int \frac{dx}{25x^2-30x+13}$; 23. $\int \frac{3x+1}{x(x^2+1)}dx$; 24. $\int \frac{3x^2+2x-3}{x^3-x}dx$;

25. $\int \frac{x^4-2x^3+3x+4}{x^3+1}dx$; 26. $\int \cos 6x \cdot \cos 10x\ dx$; 27. $\int \sin x \cos x\ dx$;

28. $\int \cos^4 x\ dx$; 29. $\int \frac{dx}{1+2\cos^2 x}$; 30. $\int \frac{dx}{1-3\sin x}$;

31. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{3x+1}+1}$; 32. $\int \frac{2x-1}{\sqrt[5]{2x-1}+\sqrt[3]{2x-1}}\ dx$; 33. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4+x^2}}$;

34. $\int \frac{dx}{1-\cos 2x}$; 35. $\int \frac{3x\,dx}{(x+1)(x^2+3)}$; 36. $\int \cos^4 x\ dx$;

37. $\int \frac{dx}{2x\sqrt{1-4\ln^2 x}}$; 38. $\int (3x+7)e^{6x}\ dx$; 39. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}-1}$;

40*. $\int \frac{\ln x\ dx}{x(1-\ln^2 x)}$;

Вариант 3

Найти неопределенные интегралы и выполнить проверку

1. $\int\left(5x^4 - Cos\ x - \frac{2}{x}\right)dx$; 2. $\int\left(x\sqrt[5]{x} - \frac{3}{\sqrt{x^5}} + \frac{1}{\sqrt{2x}}\right)dx$; 3. $\int\left(\sqrt{x^3} - \left(\frac{2}{x}\right)^2\right)\cdot\left(2\sqrt{x} - \frac{\sqrt{3}}{x}\right)dx$;

4. $\int \frac{dx}{Cos\ 2x + Sin^2 x}$; 5. $\int Sin(5x-1)\,dx$; 6. $\int x\ Cos(2x^2+1)\,dx$;

7. $\int \frac{e^x dx}{Cos^2(e^x-1)}$; 8. $\int \frac{dx}{x\ Sin^2(\ln\ x+1)}$; 9. $\int \frac{Cos\ x\ dx}{\sqrt{1-2Sin^2 x}}$;

10. $\int e^{Ctg\,x}\frac{dx}{Sin^2 x}$; 11. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\arcsin^3 x}$; 12. $\int \frac{x\ dx}{3+2x^2}$;

13. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-3\ln^2 x}}$; 14. $\int e^{arctg\,2x}\frac{dx}{1+4x^2}$; 15. $\int(7-3x)\ Sin\ 5x\ dx$;

16. $\int xe^{2x}\ dx$; 17. $\int\left(x^2+\frac{x}{2}\right)Cos\,3x\,dx$; 18. $\int(x^2-7x+3)e^{-x}\ dx$;

19. $\int x^{5/3}\ln x\ dx$; 20. $\int arccos\ 2x\ dx$; 21. $\int \frac{3dx}{1-4x}$;

22. $\int \frac{dx}{x^2-6x+10}$;
23. $\int \frac{11x^2-18x-2}{(3x+2)(4x^2-4x+5)}\,dx$;
24. $\int \frac{dx}{x^2-x-2}$;
25. $\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}\,dx$;
26. $\int \sin\frac{x}{2}\cos 4x\,dx$;
27. $\int \sin^2 x\cos^4 x\,dx$;
28. $\int \sin^2 x\cos^3 x\,dx$;
29. $\int \frac{dx}{tgx-1}$;
30. $\int \frac{dx}{2+\cos x}$;
31. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x-5}+3}$;
32. $\int \frac{\sqrt[6]{x-4}}{1+\sqrt[3]{x-4}}\,dx$;
33. $\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}\,dx$;
34. $\int \frac{e^x\,dx}{\sin^2 e^x}$;
35. $\int (4x^2-7x+1)\cos 2x\,dx$;
36. $\int \cos^4 x\sin^3 x\,dx$;
37. $\int \frac{x\,dx}{(x+5)(x^2+3)}$;
38. $\int \left(\sqrt{2}-\frac{3}{x}+\cos x\right)dx$;
39. $\int \frac{2dx}{1+\sqrt{x}}$;
40*. $\int \frac{x\sin x}{\cos^3 x}\,dx$;

Вариант 4

Найти неопределенные интегралы и выполнить проверку

1. $\int \left(\frac{1}{1+x^2}-\frac{3}{\sqrt{2x}}+x^2\right)dx$;
2. $\int \left(x\sqrt[3]{2x}-\frac{2}{x}\right)^2 dx$;
3. $\int \frac{2\sqrt[5]{x}+x\sqrt{x}}{x}\,dx$;
4. $\int \frac{3-5tg^2x}{Sin^2x}\,dx$;
5. $\int Cos(2-3x)\,dx$;
6. $\int \frac{x\,dx}{Cos^2(1-x^2)}$;
7. $\int \frac{e^x dx}{Sin^2(1-3e^x)}$;
8. $\int \frac{\ln(x+1)}{x+1}\,dx$;
9. $\int (2Cos\,x-1)^5 Sin\,x\,dx$;
10. $\int \frac{Sin(3tg\,x-1)}{Cos^2x}\,dx$;
11. $\int \frac{(\arcsin x+2)^5}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$;
12. $\int e^{Ctg\,x}\frac{dx}{Sin^2x}$;
13. $\int \frac{x^4dx}{2x^5-1}$;
14. $\int \frac{dx}{x\ln x}$;
15. $\int \frac{x+3}{2}\cos 3x\,dx$;
16. $\int xe^{-x}\,dx$;
17. $\int (x^2-4)\,Sin\,(-x)\,dx$;
18. $\int (1-x)^2e^{3x}\,dx$;
19. $\int x\ln^2 3x\,dx$;
20. $\int arcctg\,x\,dx$;
21. $\int \frac{5dx}{(2+8x)^2}$;
22. $\int \frac{x+1}{4x^2-12x+11}\,dx$;
23. $\int \frac{2x+5}{x(x^2+2)}\,dx$;
24. $\int \frac{dx}{x^3+1}$;
25. $\int \frac{x^3}{x-2}\,dx$;
26. $\int \sin x\sin 3x\,dx$;
27. $\int \sin^3 x\cos^3 x\,dx$;
28. $\int \cos^2 x\,dx$;
29. $\int \frac{tg^5x}{\cos^2 x}\,dx$;
30. $\int \frac{dx}{2-\sin x}$;
31. $\int \frac{2x+1}{\sqrt[3]{x+7}}\,dx$;
32. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+2}+\sqrt[4]{x+2}}$;
33. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{16-x^2}}$;
34. $\int \frac{x+1}{(x-1)(x^2+4)}\,dx$;
35. $\int \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}\,dx$;
36. $\int \frac{\sqrt[5]{tgx}}{\cos^2 x}\,dx$;

37. $\int \sin x \cos^4 x\ dx$;    38. $\int\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2 dx$    39. $\int (2x+9)e^{5x}\ dx$;

40*. $\int \frac{arktgx}{x^2(1+x^2)}dx$;

<u>Вариант 5</u>

Найти неопределенные интегралы и выполнить проверку

1. $\int\left(2x^3-\sqrt[3]{x}+e^x\right)dx$;    2. $\int\left(\frac{x^2\sqrt{x}}{2}-\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x}\right)dx$;    3. $\int\left(2-\frac{3}{\sqrt{x}}\right)\cdot\left(x-x^{2/3}+1\right)dx$;

4. $\int\frac{10^x-15^x}{5^x}\ dx$;    5. $\int\frac{dx}{Cos^2(x+2)}$;    6. $\int\frac{x^2dx}{Sin^2(3-x^3)}$;

7. $\int\frac{e^xdx}{1+e^{2x}}$;    8. $\int\frac{dx}{x(1+\ln^2 x)}$;    9. $\int\frac{Cos\ x\ dx}{1-3Sin\ x}$;

10. $\int\frac{Cos\ Ctg\ x}{Sin^2x}\ dx$;    11. $\int\frac{dx}{arctg\ 2x\ (1+4x^2)}$;    12. $\int\frac{Sin\ x\ dx}{\sqrt{1-4Cos^2x}}$;

13. $\int e^{2tg\ x}\frac{dx}{Cos^2x}$;    14. $\int\frac{x^2dx}{1-3x^3}$;    15. <u>∫(1-x) Sin (-2x) dx;</u>

16. $\int 3x\ e^{-2x}\ dx$;    *17.* $\int x^2\ Cos\ 4x\ dx$;    *18.* $\int(2x-x^2)\ e^{-x}\ dx$;

*19.* $\int\sqrt{x^7}\ \ln x\,dx$;    *20.* $\int arcsin\ 3x\ dx$;    21. $\int\frac{dx}{(4-x)^5}$;

22. $\int\frac{dx}{25x^2-20x+7}$;    23. $\int\frac{3x-1}{x(x^2+3)}\ dx$;    24. $\int\frac{dx}{x^4-1}$;

25. $\int\frac{x^4}{x^2+16}\ dx$;    26. $\int\cos 3x\cos\frac{x}{2}\ dx$;    27. $\int\sin^2 x\ dx$;

28. $\int\sin x\cos^5 x\ dx$;    29. $\int\frac{dx}{3-\sin^2 x}$;    30. $\int\frac{dx}{1-3\cos x}$;

31. $\int\frac{\sqrt{x-1}+4}{\sqrt{x-1}+1}dx$;    32. $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+3)^2}-\sqrt{2x+3}}$;    33. $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-25}}$;

34. $\int\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-2x\right)\left(\sqrt[3]{3x}-\left(\frac{2}{x}\right)^2\right)dx$;    35. $\int\frac{3}{2}x\sin x\ dx$;    36. $\int\frac{dx}{1+\sqrt{x+2}}$;

37. $\int\frac{x\,dx}{(x-3)(x^2+10)}$;    38. $\int e^{3x-1}\ dx$;    39. $\int\sin^5 x\cos^5 x\ dx$;

40*. $\int x\cos x^2\ dx$;

Вариант 6

Найти неопределенные интегралы и выполнить проверку

1. $\int\left(2^x - x^2 + \frac{2}{x}\right)dx$; 2. $\int\left(\frac{x}{\sqrt{x}} - \frac{5}{x}\right)^2 dx$; 3. $\int\frac{x\sqrt[3]{x}-2}{x\sqrt[5]{x}}dx$;

4. $\int\frac{7-Cos^3x}{2Cos^2x}dx$; 5. $\int\frac{dx}{Sin^2(7-x)}$; 6. $\int e^{x^2+x}(2x+1)\,dx$;

7. $\int\frac{e^x dx}{\sqrt{1-e^{2x}}}$; 8. $\int\frac{dx}{2x\sqrt{1-4\ln^2 x}}$; 9. $\int\frac{Sin(x+1)\,dx}{1+Cos^2(x+1)}$;

10. $\int e^{tg\,x}\frac{dx}{Cos^2x}$; 11. $\int\sqrt{\frac{\arcsin^4 x}{1-x^2}}\,dx$; 12. $\int\frac{x\,dx}{1-3x^2}$;

13. $\int Sin^3x\,Cos\,x\,dx$; 14. $\int\frac{e^{2arctg\,x}}{1+x^2}dx$; 15. $\int(3+2x)\,Cos\,x\,dx$;

16. $\int(1-x)\,e^{-3x}\,dx$; *17.* $\int(x^2-4x+5)\,Sin\,x\,dx$; *18.* $\int(1-x^2)\,e^{4x}\,dx$;

*19.* $\int x^4\ln^2 3x\,dx$; *20.* $\int arccos\,2x\,dx$; 21. $\int\frac{3dx}{(x+4)^7}$;

22. $\int\frac{dx}{x^2-4x-1}$; 23. $\int\frac{8x+5}{(x+1)(x^2+2)}$; 24. $\int\frac{2x+3}{x^2+3x-10}dx$;

25. $\int\frac{x^5}{x^3-27}dx$; 26. $\int\sin x\cos 6x\,dx$; 27. $\int\cos x\sin^4 x\,dx$;

28. $\int\sin^4 x\cos^4 dx$; 29. $\int\frac{\sin^4 x}{\cos^8 x}dx$; 30. $\int\frac{dx}{3-\sin x}$;

31. $\int\frac{dx}{\sqrt{3x-1}+2}$; 32. $\int\frac{\sqrt{1-x}\,dx}{\sqrt{1-x}-\sqrt[3]{1-x}}$; 33. $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}$;

34. $\int\sin^5 x\cos^2 x\,dx$; 35. $\int\frac{(4x^3+1)dx}{x^2+x-7}$; 36. $\int\frac{x\sqrt{x}\,dx}{x+2}$;

37. $\int\frac{2x+5}{x(x^2+6)}dx$; 38. $\int(5x+3)\cos(-3x)\,dx$; 39. $\int(2x^x-5^x)^2 dx$;

40*. $\int\ln(x^2+1)\,dx$;

Вариант 7

Найти неопределенные интегралы и выполнить проверку.

1. $\int\left(Sin\,x - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{3}x^2\right)dx$; 2. $\int\left(\frac{\sqrt[3]{x}}{2} - \frac{1}{x\sqrt{x}} + \sqrt{\frac{5}{x}}\right)dx$; 3. $\int(x^{1/7} - x^{0,3})(2+\sqrt{x})\,dx$;

4. $\int\frac{1+Cos^2x}{1+Cos\,2x}dx$; 5. $\int e^{2x+1}dx$; 6. $\int\sqrt[5]{(x^2+1)^3}\,dx$;

7. $\int\frac{e^x dx}{Sin^2 e^x}$; 8. $\int\frac{\sqrt[7]{(2\ln x-3)^4}}{x}dx$; 9. $\int\frac{Cos\,x\,dx}{\sqrt{1-3Sin^2x}}$;

10. $\int\frac{tg^5x}{Cos^2x}dx$; 11. $\int\frac{\sqrt{arctg(x+1)}}{1+(x+1)^2}dx$; 12. $\int e^xCos(e^x+3)\,dx$;

13. $\int e^{x^2+2}x\,dx$; 14. $\int \frac{\arcsin^2 x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$; 15. $\int (1-3x)\,Cos\,x\,dx$;

16 . $\int (1-x)\,e^x\,dx$; *17.* $\int (x^2+5)\,Sin\,2x\,dx$; *18.* $\int (x+3)^2\,e^{2x}\,dx$;

*19.* $\int \frac{\ln 2x}{\sqrt[3]{x}}\,dx$; *20.* $\int arcctg\,3x\,dx$; 21. $\int \frac{dx}{2x-3}$;

22. $\int \frac{x-1}{9x^2+6x+5}\,dx$; 23. $\int \frac{7x-2}{(x+1)(x^2+2)}\,dx$; 24. $\int \frac{2x+3}{(x-2)^3}\,dx$;

25. $\int \frac{x^4\,dx}{(x^2-1)(x+2)}$; 26. $\int \sin 7x \sin x\,dx$; 27. $\int \cos^6 x \sin^4 x\,dx$;

28. $\int \sin^5 x\,dx$; 29. $\int \frac{tg^7 x}{\sin^4 x}\,dx$; 30. $\int \frac{dx}{2+3\cos x}$;

31. $\int \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}+5}$; 32. $\int \frac{(2x-5)dx}{\sqrt[3]{2x-5}+\sqrt{2x-5}}$; 33. $\int \frac{x^2dx}{(4-x^2)^3}$;

34. $\int \frac{\cos(3-4\ln x)}{2x}\,dx$; 35. $\int \cos^5 x dx$; 36. $\int \frac{\ln 2x}{x\sqrt{x}}\,dx$;

37. $\int (2x^{0.1}-x^{1/2})^3\,dx$; 38. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$; 39. $\int \frac{x-3}{(x+2)(x^2+5)}\,dx$;

40*. $\int \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x+1}}\,dx$;

Вариант 8

Найти неопределенные интегралы и выполнить проверку.

1. $\int \left(\frac{1}{Cos^2 x}+2x^2-\frac{1}{x}\right)dx$; 2. $\int \left(\frac{x}{\sqrt[4]{x}}+\sqrt[3]{\frac{2}{x}}\right)^2 dx$; 3. $\int \frac{x^{5/3}-4x+3}{x\sqrt[3]{x}}\,dx$;

4. $\int \frac{Sin\,2x}{Sin\,x}\,dx$; 5. $\int \frac{dx}{1+9x^2}$; 6. $\int \frac{x\,dx}{2x^2+5}$;

7. $\int \frac{e^x dx}{1+4e^x}$; 8. $\int \frac{dx}{x(\ln x+8)}$; 9. $\int e^{Cos\,x-1} Sin\,x\,dx$;

10. $\int \frac{dx}{Sin^2 x\,(4-3Ctg\,x)}$; 11. $\int e^{1-\arcsin x}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; 12. $\int \frac{\sqrt[5]{tg\,x}}{Cos^2 x}\,dx$;

13. $\int \frac{dx}{x\,Sin^2(1-\ln x)}$; 14. $\int \frac{x\,dx}{1+x^4}$; 15. $\int (2x-4)\,Cos\,3x\,dx$;

16. $\int (3-x)\,e^{4x}\,dx$; *17.* $\int (x-x^2)\,Sin\,x\,dx$; *18.* $\int (x^2+3x-1)\,e^{2x}\,dx$;

*19.* $\int x^{-3/4}\,ln^2\,5x\,dx$; 20. $\int \arcsin\frac{x}{2}\,dx$; 21. $\int \frac{5dx}{(8-7x)^3}$;

22. $\int \frac{dx}{16x^2-40x+29}$; 23. $\int \frac{5x-11}{x(x^2+4)}\,dx$; 24. $\int \frac{xdx}{x^2+3x+2}$;

25. $\int \frac{x^3+3x^2+5x+7}{x^2+2}dx;$ 26. $\int \cos 6x \cos\frac{x}{4}dx;$ 27. $\int \cos^2 x \sin x dx;$

28. $\int \sin^4 x \cos^2 x dx;$ 29. $\int tg^4 x dx;$ 30. $\int \frac{dx}{2+\sin x};$

31. $\int \frac{\sqrt{x-3}}{2x+1}dx;$ 32. $\int \frac{\sqrt[6]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}dx;$ 33. $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{(9-x^2)^3}};$

34. $\int \frac{x-2}{(x+2)(x^2+3)}dx;$ 35. $\int \frac{\sin 2x}{\sin x}dx;$ 36. $\int \cos^5 x \sin^4 x dx;$

37. $\int (4+5x)e^{-x}dx;$ 38. $\int \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}-1}dx;$ 39. $\int \frac{dx}{25+4x^2};$

40*. $\int \frac{\arcsin x}{x^2}dx$

## Вариант 9

Найти неопределенные интегралы и выполнить проверку.

1. $\int\left(x^5-\frac{1}{3x}+2e^x\right)dx;$ 2. $\int\left(\frac{3x}{\sqrt{2x}}-2x^2\sqrt{x}-\sqrt{\frac{x}{2}}\right)dx;$ 3. $\int \frac{\sqrt{x}-8x^{0,8}}{x^{1/4}}dx;$

4. $\int \frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}dx;$ 5. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}};$ 6. $\int x^3 Sin(x^4-3)dx;$

7. $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{1-9e^{2x}}};$ 8. $\int \frac{Sin(2-\ln x)}{x}dx;$ 9. $\int \sqrt[3]{2Sin\ x-1}\ Cos\ x\ dx;$

10. $\int \frac{Sin(2tg\ x-1)}{Cos^2 x}dx;$ 11. $\int \frac{\sqrt[3]{arctg\ x+5}}{1+x^2}dx;$ 12. $\int e^{1-Cos\, x} Sin\ x\ dx;$

13. $\int e^{3x-1}dx;$ 14. $\int \frac{dx}{Sin^2 x\ Ctg^5 x};$ 15. $\int (2x-1)\ Sin\ 5x\ dx;$

16. $\int \frac{x+1}{2}e^{-x}dx;$ 17. $\int x^2\ Cos\ (-x)\ dx;$ *18.* $\int (x-1)^2\ e^{-2x}\ dx;$

*19.* $\int x^{-4/7}\ ln\ 2x\ dx;$ *20.* $\int arctg\ (-x)\ dx;$ 21. $\int \frac{dx}{(x-4)^3};$

22. $\int \frac{dx}{x^2-2x+10};$ 23. $\int \frac{3x dx}{(x+1)(x^2+3)}$ 24. $\int \frac{7x-6}{2x^2-6x+4}dx;$

25. $\int \frac{x^4 dx}{x^2+1};$ 26. $\int \sin 4x \cos 3x dx;$ 27. $\int \cos^6 x\, dx;$

28. $\int \sin^3 x\, dx;$ 29. $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^8 x}dx;$ 30. $\int \frac{dx}{4-\cos^x};$

31. $\int \frac{x+1}{x\sqrt{x-4}}dx;$ 32. $\int \frac{dx}{\sqrt{x-7}+\sqrt[3]{x-7}};$ 33. $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2+16}};$

34. $\int (2+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[5]{x}})^3 dx;$ 35. $\int (4x+1)e^{9x}dx;$ 36. $\int \cos^5 x \sin^2 x\, dx;$

37. $\int \frac{\cos(x+2)}{\sqrt{1-\sin^2(x+2)}}dx$; 38. $\int \frac{10xdx}{\sqrt{2+x}}$; 39. $\int \frac{x^2+2}{(x+1)^2(x-1)}dx$;

40*. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+1}}$;

Вариант 10

Найти неопределенные интегралы и выполнить проверку

1. $\int\left(e^x-\frac{1}{2Sin^2x}+\sqrt{3}x^4\right)dx$; 2. $\int\left(x^{2/3}-\frac{\sqrt{x^3}}{2}\right)^2dx$; 3. $\int\frac{x^{0,5}-3x+2}{\sqrt[5]{x^2}}\,dx$;

4. $\int\left(4^x+3^x\right)^2dx$; 5. $\int\sqrt[3]{x-3/2}\,dx$; 6. $\int x\,Cos\left(1-3x^2\right)dx$;

7. $\int e^x\sqrt{2-e^x}\,dx$; 8. $\int Sin(3-\ln x)\frac{dx}{x}$; 9. $\int\frac{Sin\ x\ dx}{3Cos\ x-4}$;

10. $\int\frac{Cos(1-Ctg\ x)}{Sin^2x}dx$; 11. $\int\frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}\arcsin 2x}$; 12. $\int\frac{\left(4x^3+1\right)dx}{x^4+x-7}$;

13. $\int\frac{Sin(1-2\ln x)}{x}dx$; 14. $\int\frac{\sqrt{(tg\ x+5)^5}}{Cos^2x}dx$; 15. $\int(2x+1)\ Cos\ (-3x)\ dx$;

16. $\int xe^{5x}\ dx$; 17. $\int(x^2-1)\ Sin\ 2x\ dx$; 18. $\int(3-x-x^2)\ e^{-x}\ dx$;

19. $\int\frac{\ln^2 x}{x\sqrt{x}}dx$; 20. $\int \operatorname{arctg}\frac{x}{3}\,dx$; 21. $\int\frac{4dx}{(3x-1)^2}$;

22. $\int\frac{dx}{9x^2-6x+3}$; 23. $\int\frac{x\,dx}{(x+5)(x^2+3)}$; 24. $\int\frac{x-4}{x^2-5x+6}dx$;

25. $\int\frac{x^5+1}{x^4-8x^2+16}dx$; 26. $\int\sin x\sin 9x\,dx$; 27. $\int\sin^4 x\cos^3 x\,dx$;

28. $\int\sin^4 x\,dx$; 29. $\frac{dx}{2-\cos^2 x}$; 30. $\int\frac{dx}{1-3\sin x}$;

31. $\int\frac{3x-1}{\sqrt{2-x}}dx$; 32. $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x)^2}-\sqrt{1-x}}$; 33. $\int\sqrt{25-x^2}\,dx$;

34. $\int arctg 8x\,dx$; 35. $\int\left(\frac{1}{3-3x^2}-\sin x+5x^3\right)dx$; 36. $\int tgx\,dx$;

37. $\int\sin^3 x\cos x dx$; 38. $\int\frac{dx}{x^2(x^2+1)}$; 39. $\int\frac{dx}{x\sqrt{x+2}}$;

40*. $\int\frac{dx}{4\sin^2 x+\cos^2 x}$;

## <u>Вариант 11</u>

Найти неопределенные интегралы и выполнить проверку

1. $\int\left(Sin\ x-\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{x}{5}\right)dx$; 2. $\int\left(x\sqrt{x^3}-\frac{3x}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{5x}\right)dx$; 3. $\int\left(\sqrt{2x^3}-\frac{1}{x}\right)\left(\frac{\sqrt[5]{x}}{2}+x^{-1/2}\right)dx$;

4. $\int\frac{1+Sin^3x}{2Sin^2x}\,dx$; 5. $\int\frac{dx}{2-5x}$; 6. $\int\frac{x^2dx}{Cos^2\left(1+x^3\right)}$;

7. $\int\frac{e^xdx}{1-3e^x}$; 8. $\int\frac{Cos(3-4\ln\ x)}{2x}\,dx$; 9. $\int e^{1-Sin\,x}Cos\ x\ dx$;

10. $\int\frac{tg^3x}{Cos^2x}\,dx$; 11. $\int e^{\arcsin 5x}\frac{dx}{\sqrt{1-25x^2}}$; 12. $\int\left(2Cos\ x-3\right)^{10}Sin\ x\ dx$;

13. $\int\frac{dx}{x\left(1+4\ln^2x\right)}$; 14. $\int\sqrt{\frac{\arcsin^3x}{1-x^2}}\,dx$; 15. $\int(4x-7)\ Sin\ x\ dx$;

16. $\int(3x+1)\ e^{4x}\ dx$; 17. $\int(x^2-7x+2)\ Cos^2\ x\ dx$; 18. $\int\left(x^2-\frac{x}{3}+1\right)e^{-x}\ dx$;

19. $\int x\sqrt{x}\ \ln 3x\,dx$; 20. $\int arccos\ 2x\ dx$; 21. $\int\frac{2dx}{5x+3}$;

22. $\int\frac{3x-1}{x^2+4x+8}dx$; 23. $\int\frac{x+1}{(x-1)(x^2+4)}$; 24. $\int\frac{2x+7}{x^2+x-2}dx$;

25. $\int\frac{x^5dx}{x^3-1}$; 26. $\int\cos\frac{x}{8}\,\cos x\,dx$; 27. $\int\sin^2x\cos^6x\,dx$;

28. $\int\cos^3x\sin x\,dx$; 29. $\int\frac{dx}{3tgx+1}$; 30. $\int\frac{dx}{1+5\cos x}$;

31. $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{x+4}+2}$; 32. $\int\frac{(x+3)dx}{\sqrt[4]{x+3}+\sqrt{x+3}}$; 33. $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{(1+x^2)^5}}$;

34. $\int\frac{e^{1/x}}{x^2}dx$; 35. $\int\frac{dx}{(x^2+2)(x-1)^2}$; 36. $\int\sin x\cos x\,dx$;

37. $\int xe^{-7x}\,dx$; 38. $\int\frac{dx}{(2+x)\sqrt{1+x}}$; 39. $\int\left(7x-\frac{\sqrt{x}}{2}\right)\left(x^{5/3}-\frac{1}{x}\right)dx$;

40*. $\int x\ln(x^2+2)\,dx$;

## <u>Вариант 12</u>

Найти неопределенные интегралы и выполнить проверку

1. $\int\left(\frac{5}{3x}-\frac{2}{x^2}+2^x\right)dx$; 2. $\int\left(\frac{1}{\sqrt[6]{x}}+\sqrt{\frac{2}{x}}\right)^2dx$; 3. $\int\frac{x^{-3}+2x^{1/2}}{x\sqrt{x}}\,dx$;